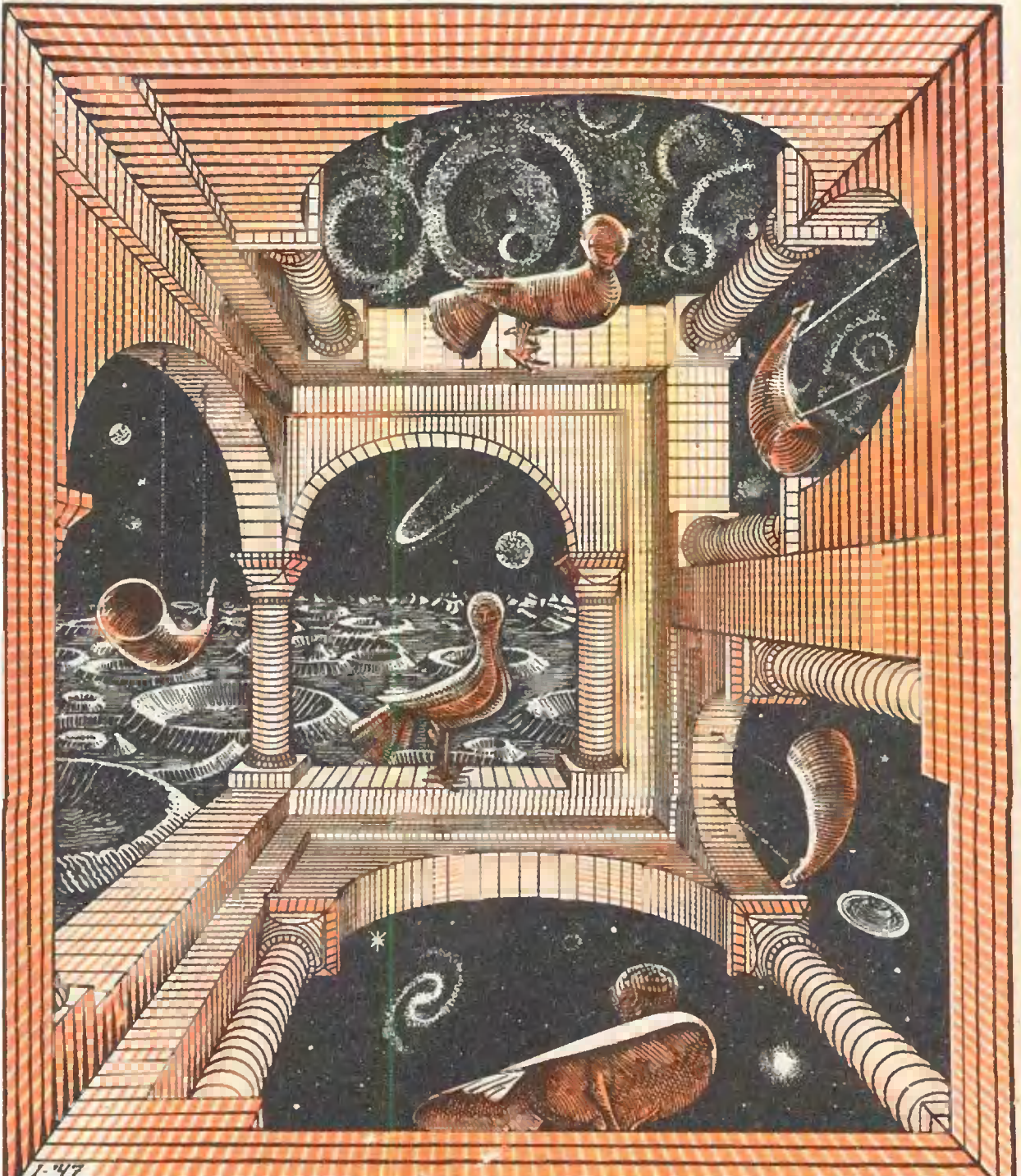
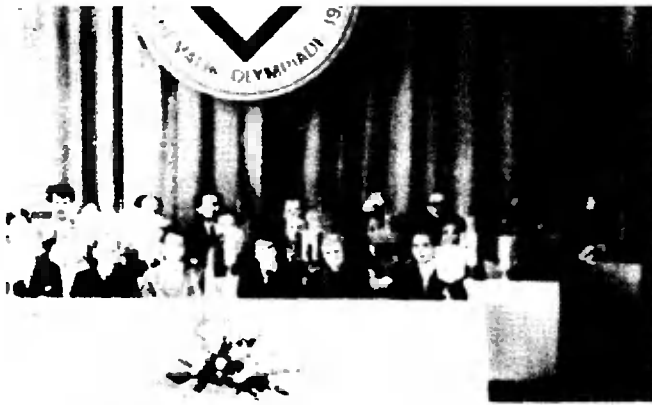


Квант

12

Научно-популярный
физико-математический
журнал





XVI Международная математическая олимпиада
 Торжественное открытие олимпиады
 Победитель олимпиады советский школьник
 А. Григорян
 Жюри олимпиады за проверкой работ
 Участники олимпиады на заводе пишущих
 машин в Эрфурте
 Здание, в котором проходила олимпиада

(Фото И. Лемана, ГДР)



Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Киконин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Кашина,
В. А. Кириллин,
главный художник

А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макаре-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
П. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. И. Савин,
П. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбург,
А. И. Ширинов.

Редакция:

В. И. Березин,
А. И. Виленкин,
Н. И. Клумова,
художественный редактор

Т. М. Макарова,
Н. А. Мишц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией

Л. В. Чернова.

В НОМЕРЕ:

- 2 В. Г. Болтянский. Бывает ли равномерное движение?
7 М. И. Каганов, Г. Я. Любарский. Электрон излучает фотоны
14 А. Приятель. Решение логических задач при помощи графов с цветными вершинами
23 С. Г. Семенчинский. Линзы, зеркала и Архимед
26 А. А. Егоров. Решетки и правильные многоугольники
34 М. В. Донской. Чемпионат мира среди шахматных программ

Математический кружок

- 39 Н. Б. Васильев. Вокруг формулы Пика

Задачник «Кванта»

- 44 Задачи М296—М300; Ф308—Ф312
46 Решения задач М256—М260; Ф269—Ф272

Практикум абитуриента

- 55 М. Л. Крайзман. Шар, касающийся ребер многогранника

Международные олимпиады школьников

- 60 В. А. Скворцов, З. И. Моисеева. XVI Международная математическая олимпиада
63 Г. С. Тарасюк. VII Международная физическая олимпиада

«Квант» для младших школьников

- 65 Задачи
66 Х. Лозе. Числовые последовательности
70 Т. С. Петрова. Как движутся молекулы?
72 Ответы, указания, решения

- 77 Напечатано в 1974 году

Уголок коллекционера

В. А. Рудов. Физики—члены Академии наук СССР на марках (3 с. обл.)

Смесь (с. 6, 25, 76)

На первой странице обложки вы видите рисунок «Относительность» голландского художника М. Эшера (1898—1972). В нем есть определенные математические содержания. Постарайтесь понять, какое?

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1974 год



В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

БЫВАЕТ ЛИ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ?

Материальная точка, на которую не действуют никакие силы, движется в инерциальной системе отсчета прямолинейно и равномерно.

Однако, «изолироваться» от воздействия сил не представляется возможным. В наших, земных, условиях на материальную точку действует сила притяжения Земли (сила тяжести), сила трения, сила сопротивления воздуха и другие. Кроме того, на многие устройства, созданные человеком (автомобиль, электропоезд, ракета), всегда действуют силы. Одним словом, от сил никуда не спрячешься.

Да, но почему автомобиль может двигаться равномерно? Читатель, конечно, скажет, что ничего удивительного в этом нет: все силы, действующие на автомобиль, уравновешиваются (то есть их равнодействующая равна нулю), а это эквивалентно тому, что на автомобиль вообще не действуют никакие силы, — вот он и движется равномерно.

И все же нечто удивительное в движении автомобиля есть. Шофер едет со скоростью 60 км/ч. Но вот он посмотрел на часы («А ведь я опаздываю!») и, после нескольких секунд разгона, поехал со скоростью 80 км/ч. И опять движение равномерное, то есть опять все силы уравновешиваются. Кто же уравновешивает силы? Шофер? И как ему удастся их уравновесить и на скорости 60 км/ч, и на скорости 80 км/ч, и на иной скорости? Разве это не удивительно? Но если вы спросите обо всем этом шофера, он

будет удивлен еще больше вас: ему и в голову не приходит, что надо что-то «уравновешивать»!

Попытаемся разобраться в этом вопросе с помощью математики. Заметим, что силу тяжести можно совсем не рассматривать: на горизонтальном участке эта сила уравновешивается силой реакции со стороны дороги. Кроме того, будем считать, что нет ветра, пренебрежем силой притяжения Луны и так далее. Тогда останутся только движущая сила F , связанная с действием двигателя и с трением ведущих колес о дорогу (эту силу будем считать постоянной на рассматриваемом участке движения), и сила сопротивления (рис. 1). Будем считать, что сила сопротивления имеет вид $-S(v)$, где $S(v)$ — возрастающая функция, обращающаяся в нуль при $v=0$ (знак минус показывает, что сила сопротивления направлена и противоположно

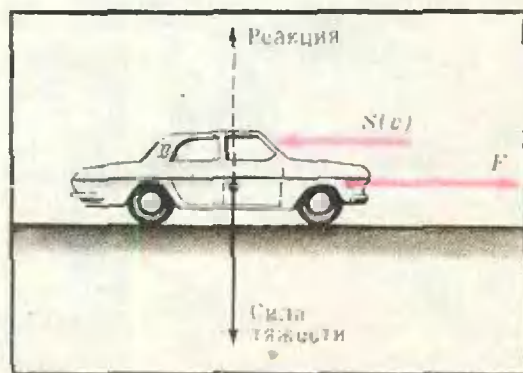


Рис. 1.

скорости). На основании второго закона Ньютона

$$ma = F - S(v). \quad (*)$$

В силу возрастания функции $S(v)$ существует единственное значение скорости — обозначим его через V , — при котором правая часть соотношения (*) обращается в нуль. Это значение V легко определить по графику функции $S(v)$ (см. рис. 2).

Т е о р е м а 1. Если в некоторый момент t_0 скорость движения v_0 меньше V , то в течение всего дальнейшего движения будет $v < V$. Если же $v_0 > V$, то все время будет $v > V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть, например, в некоторый момент $t_1 > t_0$ скорость стала больше, чем V . Тогда в промежуток между t_0 и t_1 момент времени (может быть, и не один раз) скорость была равна V . Пусть t' — последний момент (между t_0 и t_1), когда $v = V$, так что в промежутке между t' и t_1 оставалось справедливым неравенство $v > V$. Согласно (*) отсюда следует, что при $t' < t < t_1$ ускорение a было отрицательным (так как $S(v) > F$ при $v > V$). Но это противоречит тому, что за рассматриваемый промежуток времени скорость изменилась от значения V до большего значения *).

Т е о р е м а 2. Если $v_0 < V$, то с течением времени скорость движения увеличивается, все более приближаясь к значению V ; если же $v_0 > V$, то скорость все время уменьшается, также приближаясь к V .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в момент t_0 имеем $v_0 > V$. Как мы знаем из теоремы 1, в течение всего движения будет $v > V$. Из (*) следует, что ускорение будет отрицатель-

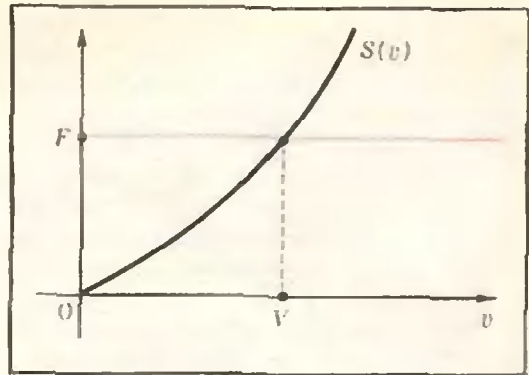


Рис. 2.

ным, и следовательно, скорость будет все время уменьшаться.

Докажем, что с течением времени разность $v - V$ станет меньше любой заранее выбранной как угодно малой величины h . Для этого рассмотрим момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{(v_0 - V)m}{S(V+h) - F}.$$

За время от t_0 до t_1 скорость уменьшилась от значения v_0 до значения, большего чем V , то есть уменьшилась менее чем на величину

$$v_0 - V = \frac{S(V+h) - F}{m} (t_1 - t_0). \quad (**)$$

Отсюда следует, что в некоторый промежуточный момент времени t^* величина ускорения была меньше чем $\frac{1}{m} [S(V+h) - F]$. (Если бы это было не так, то за рассматриваемый промежуток времени скорость уменьшилась бы не менее чем на величину (**).)

Итак, пусть в момент t^* имеем

$$|a^*| < \frac{S(V+h) - F}{m}.$$

Тогда из (*) получаем

$$\frac{S(v^*) - F}{m} < \frac{S(V+h) - F}{m},$$

то есть $S(v^*) < S(V+h)$, и потому $v^* < V+h$. Мы видим, что в момент t^* скорость отличается от V меньше чем на h . Это справедливо и для всех последующих моментов, так как скорость v убывает, оставаясь больше V .

*) Мы доказали, что если $v_0 < V$, то скорость ни в какой момент не может принять значения, большего V . То, что она не может принять и значения, равного V , доказывается чуть сложнее; эту часть доказательства пропустим.

Теоремы 1 и 2 дают качественные законы изменения скорости, то есть показывают, как она будет меняться с течением времени. Пусть, например, автомобиль некоторое время едет под уклон, после чего высзжает на горизонтальный участок дороги (рис. 3). Двигаясь под уклон, автомобиль с отключенным двигателем разгоняется и выходит на горизонтальный участок с повышенной скоростью (большей V). Что же будет дальше? Согласно теореме 1 в течение всего дальнейшего движения скорость будет больше V , причем, в силу теоремы 2, она будет постепенно уменьшаться, все более приближаясь к значению V . Таким образом, движение автомобиля на горизонтальном участке не будет равномерным, и лишь в пределе (при $t \rightarrow \infty$) мы получим равномерное движение (со скоростью $v = V$).

Аналогичная картина наблюдается в случае, если водитель (двигаясь, скажем, со скоростью 60 км/ч) намеревается увеличить скорость. С этой целью он сильнее нажимает правой ногой на педаль акселератора, увеличивая тем самым приток горючего, а значит, и силу F , развиваемую двигателем. Новому значению силы F соответствует новое значение величины V , скажем, $V = 80$ км/ч. В момент нажатия на педаль автомобиль движется еще со скоростью 60 км/ч, то есть со скоростью, меньшей V . Согласно теореме 1 в течение всего дальнейшего движения скорость бу-

дет меньше V , причем, в силу теоремы 2, она будет увеличиваться, все более приближаясь к значению $V = 80$ км/ч. Мы видим, что и в этом случае движение автомобиля не будет равномерным, и лишь в пределе (при $t \rightarrow \infty$) получится равномерное движение.

В обоих рассмотренных примерах автомобиль движется с *переменной* скоростью, которая постепенно приближается к предельному значению V . Таким образом, то, что мы обычно считаем «равномерным движением», представляет собой сложный динамический процесс. Силы, действующие на автомобиль, теоретически говоря, не уравниваются друг друга (движение происходит с переменной скоростью, и потому ускорение не равно нулю). И лишь в пределе (при $t \rightarrow \infty$) скорость приближается к постоянному значению $v = V$, ускорение стремится к нулю, а действующие силы все более точно уравниваются друг друга (то есть равнодействующая стремится к нулю). И это «постепенное уравнивание» вовсе не связано с действиями шофера (он ведь лишь поддерживает постоянное значение силы F), а вытекает из самой специфики задачи, то есть, математически говоря, является следствием уравнения (*). Практически же скорость автомобиля становится то меньше, то больше V (вследствие порывов ветра, увеличения или уменьшения шероховатости дороги и т. п.). Но она упрямо приближается к предельному значению V , пока

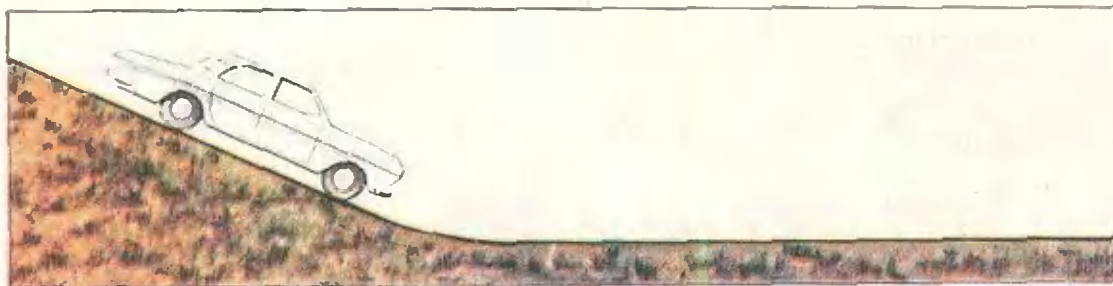


Рис. 3.

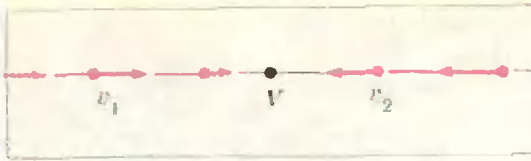


Рис. 4.



Рис. 5.

следующий толчок не сделает ее несколько меньше или больше; и вновь скорость будет приближаться к значению V ; затем опять толчок, опять приближение к V ... Это и есть «равномерное движение». И возможно оно *только* потому, что предельное значение скорости (то есть V) *устойчиво*: в какую бы сторону ни отклонилась скорость от V , она обязательно будет *приближаться* к V .

Устойчивость значения V можно наглядно пояснить построением *фазовой диаграммы* (или, как еще говорят, «фазового портрета») уравнения (*) (см. рис. 4). Отметим точку V на числовой оси. Если в некоторый момент фактическая скорость v оказывается *меньше* V (точка v_1 на диаграмме), то из (*) видно, что ускорение a будет *положитель-*

ным, то есть скорость будет *возрастать*. Это отмечено на диаграмме стрелкой, смотрящей вправо. Если же в некоторый момент скорость *больше* V (точка v_2 на диаграмме), то ускорение a отрицательно, то есть скорость начнет *убывать* (стрелка направлена влево).

Фазовая диаграмма показывает, что скорости «некуда деваться», кроме как приближаться к значению V . Это напоминает поведение шарика в ямке (рис. 5): где бы он ни находился, его «тянет» в самую нижнюю точку — в устойчивое положение равновесия. По аналогии точку V на рассматриваемой фазовой диаграмме также называют *устойчивым положением равновесия*.

Более сложный пример устойчивого положения равновесия дает подключение батареи постоянного тока к параллельно соединенным катушке и конденсатору (рис. 6). Обозначая э.д.с. батареи, ее внутреннее сопротивление и активное сопротивление катушки через E , r и R соответственно, легко найдем (по закону Ома), что в такой схеме через катушку может протекать постоянный ток $I = \frac{E}{R+r}$, причем, разность потенциалов на обкладках конденсатора будет равна $U = \frac{ER}{R+r}$. Однако в действительности процесс будет более сложным: ток I и напряжение U будут *переменными*, они будут со-

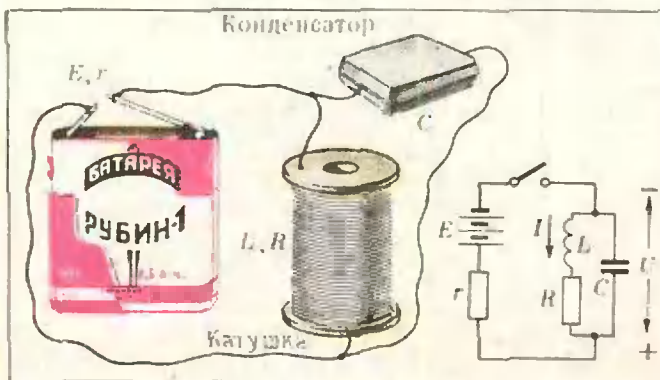


Рис. 6.

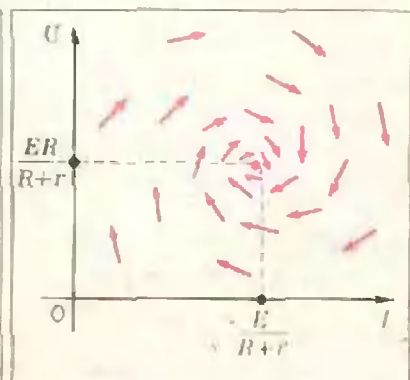


Рис. 7.

вершать «затухающие колебания» и лишь в пределе (при $t \rightarrow \infty$) будут приближаться к указанным значениям. Фазовый портрет этой системы надо будет изображать уже на координатной плоскости (поскольку вместо одной «фазовой координаты» у здесь их будет уже две: I , U (см. рис. 7)). Точка, соответствующая указанному выше постоянному току, будет здесь *устойчивым положением равновесия*; стрелки, показывающие тенденции изменения величины I , U , будут здесь таковы, что все линии, идущие вдоль стрелок, будут *приближаться к этой точке*.

Мы видим, что «равномерное» движение автомобиля, «постоянный» ток в электрической схеме и т. п. представляют собой сложные динамические процессы, происходящие вблизи устойчивого положения равновесия. Режимы «устойчивой работы» многих машин и технических устройств описываются математически в виде устойчивых положений равновесия на фазовых диаграммах. Устойчивые положения равновесия изучаются в *теории устойчивости*, являющейся важным разделом современной математики. Основы этой теории были заложены выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым. В дальнейшее ее развитие важный вклад внесли многие советские ученые.

Про кита и актинию

1. Небольшой участок нервной сети актинии можно упрощенно представить себе как прямоугольник из шести параллельных нервных волокон, соединенных пятью поперечными. Нервный импульс может выходить из любого узла по любому волокну, за исключением того, по которому он в этот узел попал. Какова кратчайшая длина пути нервного импульса от одной вершины прямоугольника до противоположной? Сколько различных путей имеют эту минимальную длину?



2. Загариженный кит способен в течение нескольких часов тащить за собой судно с двигателем, включенным на «полный назад». Мощность кита можно оценить примерно в 450 л. с. Сколько жира израсходует кит за 3 часа такой работы, если теплотворная способность жира равна 10 ккал/г и при этом лишь $\frac{1}{4}$ химической энергии обращается в механическую работу?

М. П. Головей



Классическая теория излучения

Существование в природе электромагнитного поля — давно и хорошо установленный факт. Заряженная частица, помещенная в электромагнитное поле, начинает двигаться ускоренно. Следовательно, она испытывает воздействие со стороны электромагнитного поля. Поле, ускоряя заряд, производит над ним работу, а само теряет некоторое количество энергии — поле слабеет, то есть действует на единичный заряд с меньшей силой. Наоборот, если поле замедляет заряд, оно усиливается. Иными словами, к первоначальному полю добавляется новое, созданное зарядом. Ослабление поля тоже можно рассматривать как добавление нового, созданного зарядом поля, но направление дополнительного поля противоположно направлению первоначального.

Эксперименты показали, что поле, создаваемое зарядом, зависит от величины заряда и от характера его движения. Причина, вызвавшая движение заряда, совершенно несущественна. Для вычисления поля, создаваемого движущимся зарядом, нужно решить систему дифференциальных уравнений (это и есть знаменитые уравнения Максвелла).

Для нас сейчас важен сам факт: движущийся с ускорением заряд может изменять энергию электромагнитного поля. Это явление называется излучением. Отметим, что, хорошо известный закон Кулона, в силу ко-

торого поле неподвижного заряда может быть раз и навсегда подсчитано в любой точке пространства, показывает, что неподвижный заряд не излучает. В самом деле, поле такого заряда не изменяется с течением времени, то есть не изменяется энергия поля.

Проведем мысленный эксперимент. Возьмем неподвижный заряд. Заставим его описать окружность, вернуться в исходную точку и остановиться. Какой будет картина электромагнитного поля? На первом этапе, когда заряд неподвижен, он создает обычное электростатическое поле. В течение второго этапа создается некоторое дополнительное поле. Исчезнет ли оно после того, как заряд остановится? Нет, не исчезнет! Но позвольте, ведь вокруг неподвижного заряда поле должно быть электростатическим. Неужели это неверно?

Верно, но не совсем. Созданное на втором этапе дополнительное электромагнитное поле начнет деформироваться, так что спустя t секунд после остановки заряда внутри шара радиуса ct (c — скорость света) (рис. 1) установится кулоновское поле. Вне этого шара поле будет существенно отличаться от кулоновского. Итак, поле излучения быстро удаляется от того места, где оно было создано, уступая кулоновскому полю все новые и новые области пространства. Подчеркнем, что это свойство — «убегать» со скоростью света от места зарождения (и уносить

с собой всю полученную от движущихся зарядов энергию) — общее свойство излучения.

Отметим одно важное обстоятельство. Так как электромагнитное поле излучения уносит с собой всю полученную от движущегося заряда энергию, то плотность энергии такого поля, то есть энергия, приходящаяся на единицу объема, уменьшается обратно пропорционально объему шарового слоя, в котором оно находится. Этот объем пропорционален квадрату радиуса*). Поэтому плотность энергии поля излучения обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника излучения (например, от антенны).

Плотность энергии электростатического поля пропорциональна квадрату его напряженности**). В свою очередь напряженность электростатического поля обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Значит, плотность энергии электростатического поля убывает как четвертая степень расстояния, то есть гораздо быстрее, чем плотность энергии поля излучения. Этим и объясняется, почему для радиосвязи используются поля излучения, а не электростатические поля.

*) Действительно, объем шарового слоя радиуса R и толщины ΔR равен $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ (S — площадь поверхности шара), поскольку ΔR мало по сравнению с R .

***) См. учебное пособие «Физика-9», § 86.

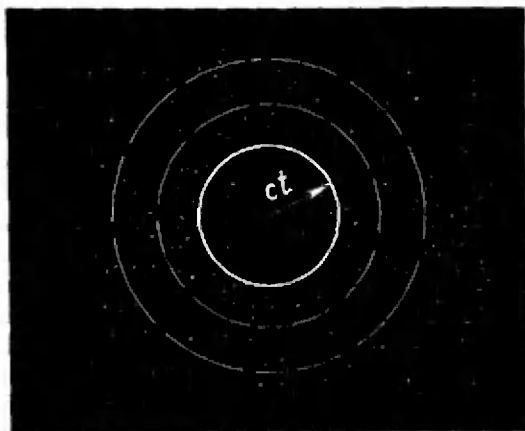


Рис. 1.

Какие же волны излучает заряженная частица, движущаяся с ускорением? Частота излученной волны зависит от характера движения частицы. Если частица совершает гармонические колебания с частотой ν_0 , то и частота излученных волн будет равна ν_0 .

Классическая электродинамика (уравнения Максвелла) дает возможность вычислить интенсивность излучения, то есть количество энергии, излученной за единицу времени. Так, например, интенсивность излучения движущегося с ускорением a заряда e равна

$$I = \frac{2e^2 a^2}{3c^3}. \quad (1)$$

В системе СГСЭ интенсивность излучения можно вычислить с точностью до коэффициента $2/3$, если знать, от чего она зависит. В этой системе все единицы выражаются через три основные: длины, массы и времени. (В системе СИ основных единиц четыре — добавляется еще единица силы тока. Поэтому электрические единицы не выражаются через механические, и такое рассмотрение провести нельзя.)

Величина интенсивности излучения определяется зарядом e , имеющим размерность $(e^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1})$, его ускорением a ($\text{см} \cdot \text{с}^{-2}$) и скоростью света c ($\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$). Из этих величин можно построить только одну комбинацию, имеющую размерность мощности ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1}$), которая приводит к выражению (1). Попробуйте проверить это.

Формула (1) показывает, что заряд, движущийся с постоянной скоростью ($a = 0$), не излучает. Этот же вывод можно получить и более простым рассуждением. Покоящаяся частица не может излучить электромагнитную волну, так как ей неоткуда взять для этого энергию. Следовательно, и частица, летящая с постоянной скоростью v в пустоте, тоже не может излучать — ведь по принципу относительности Галилея всег-

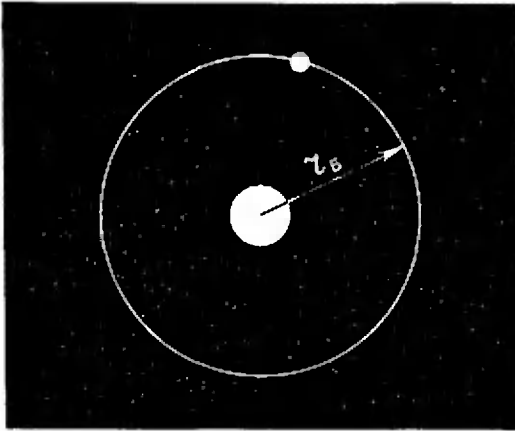


Рис. 2.

да можно выбрать эквивалентную систему отсчета, в которой эта частица покоится.

Есть еще один важный случай, когда движущиеся заряды не излучают. Рассмотрим постоянный ток, текущий по какому-либо криволинейному контуру. Из эксперимента и из теории хорошо известно, что такой ток создает постоянное магнитное поле, но не излучает. Но ведь всякий ток есть движение заряженных частиц. Каждая из этих частиц, как мы знаем, создает поле излучения. Почему же эти заряды, взятые вместе, не излучают? Оказывается, поля излучения, создаваемые разными частицами, компенсируют друг друга с такой точностью, что в результате остается чисто статическое поле. Можно считать, что в этом случае заряженные частицы движутся с одинаковой постоянной средней скоростью, и излучение отсутствует.

С помощью уравнений Максвелла можно установить общий факт: если расположение токов и зарядов в пространстве не зависит от времени, то излучение отсутствует.

Планетарная модель атома и излучение

Временно игнорируя квантовую природу атомных частиц, опишем языком классической физики простейший атом — атом водорода, состоя-

щий из одного протона и одного электрона.

Электрон вращается вокруг протона по окружности радиуса r_B^* (рис. 2), так что сила, вызывающая центростремительное ускорение, mv^2/r_B , равна кулоновской силе притяжения e^2/r_B^2 (m — масса электрона):

$$\frac{mv^2}{r_B} = \frac{e^2}{r_B^2}.$$

Отсюда можно выразить скорость вращения электрона

$$v^2 = \frac{e^2}{mr_B}. \quad (2)$$

Скорость электрона тем больше, чем меньше расстояние между ним и протоном.

Полная энергия электрона в атоме водорода — это сумма его кинетической энергии $E_{кин} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{2r_B}$ и потенциальной $E_{пот} = -e^2/r_B$:

$$E = \frac{e^2}{2r_B} - \frac{e^2}{r_B} = -\frac{e^2}{2r_B}. \quad (3)$$

Классическая физика не может объяснить тот факт, что все атомы водорода имеют один и тот же размер. Мы пока просто примем, считая это экспериментальным фактом, что у всех атомов водорода $r_B \approx 10^{-10}$ м.

Центростремительное ускорение электрона при движении по окружности равно

$$a = \frac{v^2}{r_B} = \frac{e^2}{mr_B^2}.$$

Но ведь если электрон движется с ускорением, он излучает. Какова интенсивность этого излучения, мала она или велика? Оценим ее, подставив в формулу (1) значение ускорения a :

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{e^2}{mr_B^2} \right)^2 = \frac{2e^6}{3c^3 m^2 r_B^4}.$$

Хотя все величины, входящие в эту

* r_B — радиус так называемой борвской орбиты электрона.

формулу, известны, и мы можем вычислить, какое количество энергии в секунду излучает электрон, ответ мало что скажет, ведь в мире атомов теряются обычные представления. Поступим иначе. Вычислим, какую энергию ΔE теряет электрон за время одного оборота вокруг ядра — за один период $T = \frac{2\pi r_B}{v}$:

$$\Delta E = I \frac{2\pi r_B}{v} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^3}{r_B^{5/2} m^{3/2} c^3}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\Delta E = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{r_B} \frac{e^2}{mc^2} \right)^{3/2} \frac{e^2}{2r_B}. \quad (4)$$

В этой формуле член $\frac{e^2}{2r_B} = E_a$ — характерная «атомная» энергия электрона в атоме. Следовательно, все остальные величины, входящие в формулу (4), должны образовывать безразмерную комбинацию. Действительно, величина e^2/mc^2 имеет размерность длины. Ее называют классическим радиусом электрона и обозначают r_e :

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.5 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta E}{E_a} \approx 10^{-6}.$$

Итак, при каждом обороте электрон теряет ничтожную часть своей энергии — одну десятиллионную долю. Посмотрим на эту величину с другой точки зрения.

Попробуем оценить, сколько времени «проживет» атом, если электрон будет излучать электромагнитную энергию даже такими малыми порциями. За один оборот энергия электрона уменьшится на величину $\Delta E \approx 10^{-6} E_a$, и при этом расстояние от электрона до ядра тоже уменьшится. А приблизительно за 10^6 оборотов электрон вовсе свалится на ядро! Но один оборот электрон совершает

за

$$\frac{2\pi r_B}{v} = \frac{2\pi r_B}{c} (m r_B)^{1/2} \approx 10^{-16} \text{ с.}$$

Следовательно, если бы законы классической механики и классической электродинамики были справедливы в мире атомов и электронов, атомы могли бы просуществовать не более 10^{-10} с.

Это, пожалуй, одно из наиболее катастрофических расхождений между классической теорией и экспериментом: «вечные» атомы оказались предельно неустойчивыми.

Существует еще одно противоречие между планетарной моделью атома и экспериментом. Эксперимент показывает, что атомы излучают (правда, для этого надо их предварительно возбудить, то есть передать им некоторое количество энергии) электромагнитные волны строго определенных частот. Набор этих частот является своеобразной визитной карточкой атома (на этом основан спектральный анализ).

С точки зрения планетарной модели возбужденный атом отличается от невозбужденного тем, что его электрон имеет несколько большую энергию и, следовательно, больший радиус орбиты $r_1 > r_B$. В процессе излучения расстояние от электрона до ядра постепенно уменьшается до величины r_B , при этом непрерывно изменяется (увеличивается) частота обращения. Следовательно, спектр излученных частот должен быть непрерывным от начальной частоты

$$\frac{v_1}{2\pi r_1} = \left(\frac{e^2}{m r_1} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi r_1}$$

до максимальной частоты

$$\frac{v}{2\pi r_B} = \left(\frac{e^2}{m r_B} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi r_B}.$$

Объяснить истинный дискретный спектр излучения атомов классическая планетарная модель не может. Для объяснения всего этого необходима квантовая механика.

Электрон излучает фотоны

Как же квантовая механика объясняет, почему электрон не падает на ядро?

Прежде всего следует подчеркнуть, что для объяснения свойств микромира пришлось создать принципиально новую науку: подправить классическую механику так, чтобы она объясняла свойства атомов и молекул, оказалось невозможно. Основная новизна квантовой механики — учет единства волновых и корпускулярных свойств микрочастиц.

Согласно строгим выводам квантовой механики энергия электрона может принимать не любые, а лишь дискретные значения. Значения энергии в атоме водорода

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Среди всех состояний электрона в атоме водорода есть одно особое состояние — основное состояние с наименьшей энергией. Ему соответствует $n=1$. Электрон не может иметь энергию, меньшую $E_1 = -2\pi^2 me^4/h^2$. Этот запрет связан с волновыми свойствами электрона. Он настолько строг, что обеспечивает бесконечное время жизни атома.

Итак, электрон в основном состоянии не излучает электромагнитных волн (фотонов)*. Если же электрон находится в одном из возбужденных состояний с $n > 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), он может перейти в состояние с более низкой энергией, излучив электромагнитную волну. Как и всякий процесс в природе, процесс излучения подчиняется закону сохранения энергии. Его легко записать, если воспользоваться соотношением, связывающим частоту электромагнитной волны ν с энергией фотона

$$E_n - E_{n'} = h\nu, \quad (5)$$

где $n, n' = 1, 2, 3, \dots; n > n'$.

Отсюда

$$\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h}.$$

Для водорода

$$\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) определяют спектр (набор) частот, которые может излучить или поглотить атом водорода.

Квантовая механика позволяет определить не только спектр частот излучения и поглощения, но и интенсивность излучения.

Формулы квантовой механики обладают одной интересной особенностью. Они переходят в формулы классической физики, когда «квантовость» пренебрежимо мала, то есть когда движение почти классическое. (Это важное обстоятельство получило даже специальное название — принцип соответствия.) В рассматриваемом нами случае малость квантовых эффектов проявляется в том, что при значениях n , стремящихся к бесконечности, $\Delta E = E_n - E_{n-1}$ стремится к нулю. Ведь в классической физике энергия может иметь любое значение! Мы привели только один пример, но любая формула квантовой механики допускает проверку принципом соответствия. Лучше сказать иначе: любая формула классической физики есть предельное значение квантовой формулы. Квантовая механика не отменила классическую, а указала ей ее место (и весьма почетное место). Классическая механика справедлива тогда, когда малы квантовые эффекты, и справедлива с точностью, которую допускает квантовая механика.

Излучение частицы, движущейся с постоянной скоростью

До сих пор мы говорили, что излучает только частица, движущаяся с

*) Не только атом водорода, но и любой другой атом не излучает энергии, если он находится в основном состоянии.

ускорением. Но у этого правила есть одно исключение. Электрон, движущийся с постоянной скоростью, но не в пустоте, а в какой-либо среде, излучает свет. Этот эффект называется излучением Вавилова-Черенкова.

Слова «черенковское излучение», «излучение Черенкова», «эффект Черенкова», наверное, известны многим. И многие знают, что такое излучение возникает, когда заряженная частица движется со скоростью v , большей скорости света в среде, окружающей частицу. Сверхсветовое излучение было открыто П. А. Черенковым — учеником С. И. Вавилова, а объяснили его физики-теоретики И. Е. Тамм и И. М. Франк. За эту работу Черенкову, Тамму и Франку была присуждена Нобелевская премия 1958 года по физике.

Скорость света в среде с показателем преломления n ($n = \sqrt{\epsilon}$ — диэлектрическая проницаемость среды) равна $u = c/n$. Поскольку $\epsilon > 1$, скорость света в среде u меньше скорости света в вакууме c . Это позволяет частице (например, электрону) лететь в среде со «сверхсветовой» скоростью v :

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = u < v < c.$$

Условие возникновения черенковского излучения

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad (7)$$

замечательно тем, что не содержит постоянной Планка. Это означает (по принципу соответствия), что оно может быть получено средствами как квантовой, так и классической физики. Интересно отметить, что квантовое и классическое описания эффекта Черенкова приводят практически к одинаковым результатам. Но мы ограничимся только квантовой картиной, так как для полной классической теории явления Черенкова необходим сложный математический аппарат.

При этом нам понадобятся дополнительные сведения о фотонах.

1. Фотон обладает не только определенной энергией E , но и определенным импульсом p . Направление импульса может быть любым, а величина определяется энергией:

$$p = \frac{1}{c} E.$$

2. Электромагнитное поле в среде с диэлектрической постоянной ϵ также состоит из фотонов. Фотоны в диэлектрике отличаются от фотонов в пустоте тем, что связь между их энергией и импульсом содержит диэлектрическую постоянную ϵ :

$$p = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} E = \frac{1}{u} E,$$

$$E = p \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Связь между энергией и частотой у фотонов в среде такая же, как и у фотонов в пустоте: $E = h\nu$.

3. Любое взаимодействие фотонов с другими частицами подчиняется закону сохранения энергии и закону сохранения импульса.

Теперь рассмотрим электрон, движущийся в среде с постоянной скоростью v . Пусть в некоторый момент времени он излучает фотон частоты ν с импульсом p . Обозначим импульс электрона до излучения P , а после — P' . Тогда энергия электрона до излучения $E = P^2/2m$, а после излучения — $E' = P'^2/2m$. По закону сохранения импульса $P' = P - p$, а закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{P^2}{2m} = \frac{P'^2}{2m} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} p.$$

Проверим, всегда ли может выполняться это равенство. Введем угол θ между импульсом частицы до излучения и импульсом фотона. Косинус этого угла найдем из закона сохранения импульса, записанного в скалярной форме:

$$P'^2 = P^2 + p^2 - 2Pp \cos\theta$$

(мы воспользовались теоремой косинусов). Отсюда

$$\cos \theta = \frac{p^2 - p'^2 + p^2}{2pp'} = \frac{\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \left(1 + \frac{p}{2mc} \sqrt{\epsilon} \right)}{v}, \quad (8)$$

где v — скорость излучающей частицы. Вспомним, что $p = \frac{h\nu}{c} \sqrt{\epsilon}$.

Следовательно, $\frac{p \sqrt{\epsilon}}{2mc} = \frac{h\nu\epsilon}{2mc^2}$.

Это — единственная безразмерная комбинация параметров в формуле (8), куда входит постоянная Планка. Она дает возможность оценить степень квантовости явления. Для видимого света

$$\nu \approx 10^{14} c^{-1}, \quad \epsilon \geq 1$$

$$\text{и} \quad \frac{\epsilon h \nu}{2mc^2} \approx 10^{-7}.$$

Отсюда видно, что мы, не делая большой ошибки, можем просто пренебречь вторым слагаемым в числителе формулы (8). Поэтому и классическое рассмотрение приводит к правильному результату.

Так как $\cos \theta$ должен быть меньше единицы, мы можем вывести условие (7): чтобы частица, летящая с постоянной скоростью, могла излучать световые волны, ее скорость должна превышать скорость света в среде.

Приведенное рассуждение объясняет, почему электрон со скоростью $v < c/\sqrt{\epsilon}$ не излучает и почему конус возможных направлений излучения (в случае $v > c/\sqrt{\epsilon}$) определяется формулой (8). Вычисление интенсивности излучения Черенкова значительно сложнее, и мы не будем им заниматься.

Классический смысл условия (7) очень прост: частица «убегает» от созданного ею электромагнитного поля, которое в виде волн распространяется самостоятельно.

Приближенное (с классической точки зрения — точное) равенство

$$\cos \theta = \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}} \quad (9)$$

показывает направление излученных волн.

Подумаем еще раз, на чем основан вывод формулы (9) и условие черенковского излучения (7). Во-первых, на законах сохранения энергии и импульса в процессе излучения; во-вторых, на том, что энергия фотона и величина его импульса связаны линейной зависимостью, и, наконец, в-третьих, на малости квантовой поправки. Если бы речь шла не об электромагнитной волне, а о звуковой, то все эти «во-первых», «во-вторых» и «в-третьих» были бы в точности выполнены. Для звуковой волны квант ее энергии — фэон и величина его импульса связаны линейной зависимостью

$$p = \frac{1}{s} E,$$

где s — скорость звука. Но так как скорость звука значительно меньше скорости света, то условие черенковского излучения $v > s$ может быть выполнено даже при движении макроскопических тел. Один из примеров черенковского излучения звука — щелчок бича, кончик которого в умелых руках движется со сверхзвуковой скоростью.

Черенковское излучение света нашло важное применение в экспериментальной физике. Но это — отдельная большая и интересная тема. Для нас, пожалуй, важнее то, что черенковское излучение — очень общее явление. Всегда, когда частица движется со скоростью, превышающей скорость волн в данной среде, она излучает.

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ С ЦВЕТНЫМИ ВЕРШИНАМИ

А.ПРИЯТЕЛЬ



В этой статье используются некоторые простейшие логические операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация. Многие из вас знают о них из школы — кто из факультативных курсов математики, а кто из самых обычных. Да и в «Кванте» про них рассказывалось — см., например, «Квант» № 4 за 1971 год.

Для тех же, кто не знает определений логических операций и не имеет других номеров «Кванта», мы приведем здесь лишь минимум сведений, который нужен для чтения и понимания статьи А. Приятеля.

Напомним, что *высказывание* — это предложение, про которое имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

Из различных высказываний с помощью *логических операций* можно образовывать новые высказывания. Вопрос об истинности или ложности получающихся высказываний зависит, конечно, от того, каковы (истинны или ложны) были исходные высказывания, ну и, конечно, от самой логической операции. А именно:

1) *Отрицание* истинного высказывания ложно, а отрицание ложного — истинно. Если обозначить исходное высказывание буквой A , а операцию отрицания — знаком « $\bar{}$ » (\bar{A} читается «не A »), то наше определение можно задать такой таблицей:

A	\bar{A}
и	л
л	и

(и — сокращенное «истина», л — «ложь»).

2) *Конъюнкция* двух истинных высказываний A и B ($A \wedge B$) читается как « A и B ») истинна, а если хоть одно из них ложно, то и конъюнкция ложна:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

3) *Дизъюнкция* двух высказываний (обозначение $A \vee B$ читается как « A или B ») истинна, если истинно хотя бы одно из них, и ложна, если оба они ложны:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

4) И, наконец, *импликация* высказываний A и B ($A \Rightarrow B$ читается как « A влечет B », «Из A следует B » или «Если A , то B ») ложна, если посылка A истинна, а заключение B ложно; во всех же остальных случаях импликация истинна:

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

В «Кванте» № 8 за 1973 год была помещена статья Л. Ю. Березиной «О графах с цветными ребрами», посвященная решению логических задач. Не менее интересен метод решения логических задач с помощью графов с цветными вершинами, позволяющий наглядно решать задачи, которые часто называют «логическими задачами на Джонсона и Смита» *). Этот метод состоит в изображении структуры задачи с помощью некоторого графа. Вершины такого графа будут обозначать *базисные высказывания* задачи; а ребра графа — импликации или конъюнкции между базисными высказываниями. Цвет вершины обозначает истинность или ложность изображаемого ею высказывания. В определении цвета вершин графа и заключается описываемый метод. Всюду в дальнейшем процесс определения цвета вершин мы будем называть *раскрашиванием* графа. Цвет вершины не всегда будет определяться однозначно; возможные варианты будем называть *вариантами раскрашивания*.

Для изображения структуры задачи с помощью графа условимся о символике, позволяющей переходить с языка логики на язык графов:

Таблица 1

Логическое понятие	Элемент графа
Высказывание	Вершина графа
Истинное высказывание	Вершина красного цвета
Ложное высказывание	Вершина черного цвета
Импликация $X \Rightarrow Y$	Ориентированное ребро \overrightarrow{XY} графа

Раскрашивание графов производится по правилам алгебры логики, которые переводятся на язык графов с помощью следующей символики:

Таблица 2

Правило алгебры логики	Правило раскрашивания графа
1. Каждое высказывание имеет одно и только одно из двух значений истинности: «ложно», «истинно».	1. Каждая вершина графа является либо черной, либо красной.
2. Если импликация $X \Rightarrow Y$ истинна и посылка X истинна, то и заключение Y истинно.	2. Если ребро \overrightarrow{XY} ориентированно от вершины X к вершине Y и вершина X — красная, то и вершина Y — красная.
3. Если импликация $X \Rightarrow Y$ истинна, а заключение Y ложно, то и посылка X ложна.	3. Если ребро \overrightarrow{XY} ориентированно от вершины X к вершине Y и Y — черная, то и X — черная.

*) Можно, конечно, говорить и о «задачах про Воробьева и Грачева» — пародия на них всем памятна по «Золотому теленку».

Кроме этих правил 1—3 для каждой конкретной задачи можно ввести дополнительные правила (в зависимости от структуры используемого графа).

Продemonстрируем метод на примерах решения конкретных задач.

Задача 1

Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H *) надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, врача, механика и радиста. Обязанности биолога могут выполнять E и G , гидролога — B и F , синоптика — F и G , врача — A и D , радиста — C и D , механика — C и H . Хотя некоторые из претендентов совмещают две специальности, в экспедиции каждому понадобится выполнять только одну обязанность.

Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не хочет ехать без B , D — без H и без C , C не хочет ехать вместе с G , а A не хочет ехать вместе с B ?

Базисное множество высказываний задачи состоит из восьми высказываний вида « A, B, C, \dots зачислен в состав экспедиции» (будем обозначать их соответственно буквами A, B, C, \dots).

Для облегчения восприятия условия задачи изобразим специализацию претендентов с помощью так называемого двудольного графа, то есть графа, вершины которого распадаются на два класса (две «доли») так, что вершины из одного и того же класса не связаны между собой (не соединены ребрами). Двудольные графы удобно чертить, располагая вершины одной «доли» в строку, а вершины другой — в строку, параллельную первой (рис. 1).

На рисунке 1 мы изобразили претендентов вершинами A, B, \dots, H первой доли, а специальности — вершинами $б, в, \dots, с$ («б» — биолог, «в» — врач и т. д.) второй доли. Вершину первой доли свяжем с вершинами второй доли, если соответствующий претендент владеет соответствующей специальностью. По такому графу легко определить, какие два претендента владеют одной специальностью.

Из двух претендентов X и Y , владеющих одной специальностью, над взять хотя бы одного, то есть верна дизъюнкция вида $X \vee Y$, равносильная импликации $\bar{X} \Rightarrow Y$ **). На основании этого можно записать

$$(\bar{E} \Rightarrow G) \wedge (\bar{B} \Rightarrow F) \wedge (\bar{F} \Rightarrow G) \wedge (\bar{A} \Rightarrow D) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (\bar{C} \Rightarrow H).$$

Кроме того, если X не хочет ехать без Y , то верна импликация $\bar{Y} \Rightarrow \bar{X}$, а если X не хочет ехать вместе с Y , — импликация $Y \Rightarrow \bar{X}$. На основании этого имеем

$$(\bar{B} \Rightarrow \bar{F}) \wedge (\bar{H} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (G \Rightarrow \bar{C}) \wedge (B \Rightarrow \bar{A}).$$

Итак, условие задачи можно представить в виде конъюнкции импликаций:

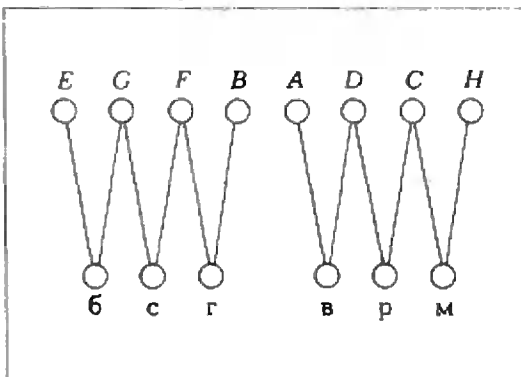


Рис. 1.

*) Разумеется, это как раз их фамилии: Джонсон, Смит, Браун, ... (Воробьев, Грачев, Дроздов и т. д.).

***) Или $\bar{Y} \Rightarrow \bar{X}$ — безразлично.

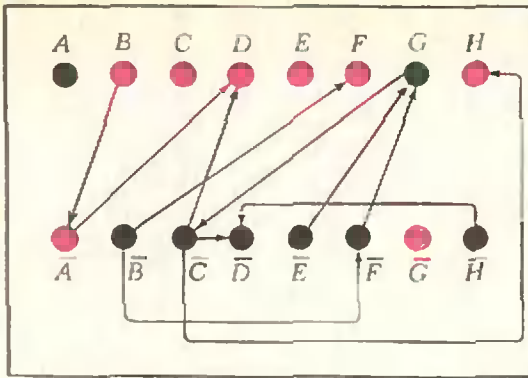


Рис. 2.

Содержащиеся в условии Π импликаций (1) изобразим ориентированными ребрами графа (согласно данным таблицы 1, — см. рис. 2).

Раскрашивание графа мы всегда будем начинать с допущения о цвете одной из вершин X графа. Эту вершину X мы будем выбирать так, чтобы сумма ее связности $r(X)$ со связностью $r(\bar{X})$ вершины \bar{X} была наибольшей, так как в этом случае цвет вершины X дает максимум информации о цвете других вершин. В некоторых случаях одно допущение позволяет полностью и однозначно раскрасить граф или приводит к противоречию, в других необходимо делать новые допущения. Последнее случается тогда, когда исчерпывается информация, предоставляемая первым допущением (прерывается цепочка рассуждений).

Полное раскрашивание графа дает решение задачи, противоречие указывает на неверность допущения. О цвете вершины X можно сделать два допущения: « X — красная», « X — черная». Необходимо попробовать оба допущения; лишь тогда удастся исчерпать все варианты раскрашивания.

Введем теперь дополнительные правила раскрашивания 4—6:

П р а в и л о 4

Если высказывание истинно, то отрицание ложно, и наоборот.

Если одна из вершин в вертикальном столбце — красная, то другая — черная.

П р а в и л о 5

Если шестерых претендентов включили в состав экспедиции, то остальных исключили.

Если в верхней строке шесть вершин красные, то остальные — черные.

П р а в и л о 6

Если двух претендентов исключили из состава экспедиции, то остальных включили.

Если в верхней строке 2 вершины черные, то остальные — красные.

Теперь, руководствуясь правилами 1—6, мы можем раскрасить граф, изображенный на рисунке 2:

1. Предположим, что вершина C — красная. Тогда:

- 1) \bar{C} — черная (4)*); 2) G — черная (3); 3) \bar{E}, \bar{F} — черные (3); 4) \bar{B} — черная (3); 5) E, F и B — красные (4); 6) \bar{G} — красная (4); 7) \bar{A} — крас-

$$\begin{aligned}
 & (\bar{E} \Rightarrow G) \wedge (\bar{B} \Rightarrow F) \wedge (\bar{F} \Rightarrow G) \wedge (\bar{A} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow D) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (\bar{C} \Rightarrow H) \wedge (\bar{B} \Rightarrow \bar{F}) \wedge \\
 & \wedge (\bar{H} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (G \Rightarrow \bar{C}) \wedge \\
 & \wedge (B \Rightarrow \bar{A}). \tag{1}
 \end{aligned}$$

Представим структуру задачи в виде графа. При этом вершины, изображающие не отрицаемые высказывания вида X , расположим на одной прямой, а вершины вида \bar{X} — на параллельной ей прямой так, чтобы A и \bar{A} , B и \bar{B} и т. д. были расположены в вертикальных столбцах. Содержащиеся в условии Π импликаций (1) изобразим ориентированными ребрами графа (согласно данным таблицы 1, — см. рис. 2).

*) Здесь и в дальнейшем цифры в скобках обозначают номер правила, на основании которого делается вывод о цвете вершины.

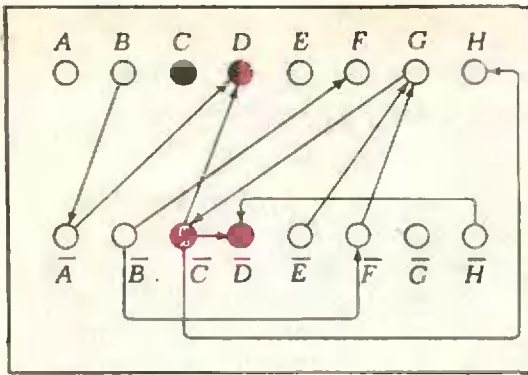


Рис. 3.

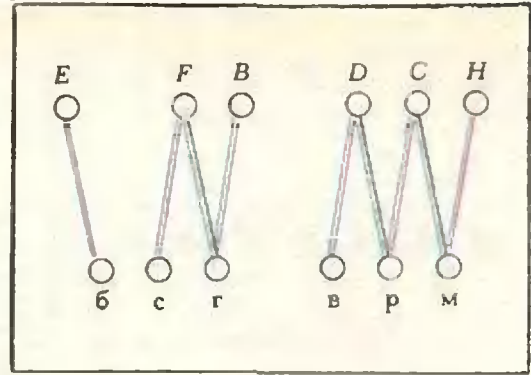


Рис. 4.

ная (2); 8) A — черная (4); 9) D — красная (2); 10) \bar{D} — черная (4); 11) \bar{H} — черная (3); 12) H — красная (4).

Полученный результат согласуется с правилами 5 и 6. Следовательно, если C включен в состав экспедиции, то надо еще включить B, D, E, F и H и исключить A и G .

II. Предположим, что вершина C — черная (рис. 3):

1) \bar{C} — красная (4); 2) \bar{D} — красная (2); 3) D — черная (4); 4) D — красная (2).

Поскольку D не может быть одновременно красной и черной (1), предположение « C — черная» приводит к противоречию; значит, C — красная, и задача имеет единственное решение:

$$B, C, D, E, F, H (\bar{A}, \bar{G}).$$

Остается определить, какую должность будет занимать в экспедиции каждый из шестерых, включенных в ее состав. Для этого нам придется воспользоваться графом с цветными ребрами.

Перечертим граф, изображенный на рисунке 1, исключив вершины A и G и связанные с ними ребра (рис. 4). Ребра графа начертим синим цветом, чтобы удобно было потом «наводить» (закрашивать) их другими цветами. Условимся, что ребро, связывающее вершину X первой доли с вершиной a второй доли, будет красным, если X занимает должность a , и черным, если X не занимает этой должности (например, « Fc — красное», если F занимает должность снитолика, а « Dp — черное» означает, что D не занимает должность радиста).

При определении цвета ребер мы будем руководствоваться следующими дополнительными правилами:

П р а в и л о 7

Если только один из зачисленных в состав экспедиции может занять должность a , то ему и придется ее занять.

Если вершина a инцидентна только одному синему ребру, то это ребро наводится красным.

П р а в и л о 8

Если некоторому X , зачисленному в состав экспедиции, приходится занять ввиду условия 7 должность a , то он не может занимать никакую другую.

Если вершина X инцидентна одному красному ребру, то остальные связанные с ней ребра (если таковые имеются) наводятся черным.

Руководствуясь правилами 7—8, раскрасим граф на рисунке 4:

1) $Eб$ — красное (7); 2) $Fс$ — красное (7); 3) $Fг$ — черное (8); 4) $Вг$ —

красное (7); 5) D_v — красное (7); 6) D_p — черное (8); 7) C_p — красное (7); 8) C_m — черное (8); 9) H_m — красное (7).

Красными являются лишь ребра E_b, F_c, B_g, D_v, C_p и H_m . Итак, B следует взять в качестве гидролога, C — радиста, D — врача, E — биолога, F — синоптика, H — механика.

В качестве второго примера возьмем задачу А. С. Сорокина «Несостоявшийся обед» («Квант» № 11, 1972). Напомним ее условие, несколько сократив формулировку.

Задача 2

N хотел пригласить на обед по возможности всех своих соседей: A, B, C, D, E, F, G и H *). При этом он, однако, столкнулся со следующими препятствиями:

A никогда не придет, если пригласить B или C , или если одновременно будут приглашены D и E (1);

D придет только в том случае, если будет приглашен и E (2);

E не примет приглашения, если придет B (3);

F наносит визиты только в сопровождении G (4);

H не будет возражать против присутствия F только в том случае, если будет приглашен и A (5);

Но если не будет приглашен F , то H будет и против приглашения E (6);

чтобы пришел G , надо пригласить D или H (7);

наконец, C откажется от приглашения, если будет приглашен E без A , а также если будет приглашен B или C (8).

Какое максимальное число гостей (и кого именно) мог пригласить N ?

Базисное множество высказываний задачи состоит из восьми высказываний вида « $A (B, C, \dots)$ приглашен на обед» (будем обозначать их соответственно буквами A, B, C, \dots).

Запишем условия (1)—(8) задачи в символах алгебры логики:

$$(1) (B \Rightarrow \bar{A}) \wedge (C \Rightarrow \bar{A}) \wedge ((D \wedge E) \Rightarrow \bar{A});$$

$$(2) D \Rightarrow E;$$

$$(3) B \Rightarrow \bar{E};$$

$$(4) F \Rightarrow G;$$

$$(5) (F \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{H};$$

$$(6) (\bar{F} \wedge E) \Rightarrow \bar{H};$$

$$(7) G \Rightarrow (D \vee H);$$

$$(8) (B \Rightarrow \bar{C}) \wedge (C \Rightarrow \bar{C}) \wedge ((E \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{C}).$$

Условие всей задачи будет иметь вид конъюнкции 12 импликаций:

$$(B \Rightarrow \bar{A}) \wedge (C \Rightarrow \bar{A}) \wedge ((D \wedge E) \Rightarrow \bar{A}) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge (B \Rightarrow \bar{E}) \wedge (F \Rightarrow G) \wedge \\ \wedge ((F \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{H}) \wedge ((\bar{F} \wedge E) \Rightarrow \bar{H}) \wedge ((\bar{D} \wedge \bar{H}) \Rightarrow \bar{C}) \wedge (B \Rightarrow \bar{C}) \wedge \\ \wedge (C \Rightarrow \bar{C}) \wedge ((E \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{C})$$

В пяти из них посылки выражены конъюнкциями базисных высказываний. Упростить такие импликации нельзя, и их посылки, наряду с базисными высказываниями и их отрицаниями, придется изобразить вершинами графа. Сделаем это следующим образом.

Вершины, изображающие базисные высказывания и их отрицания, расположим по схеме, использованной при решении задачи 1. Кроме того,

*) То есть (например) Воробьева, Грачева, Дроздова, Воронова, Соколова, Орлова, Соловьева и Щеглова.

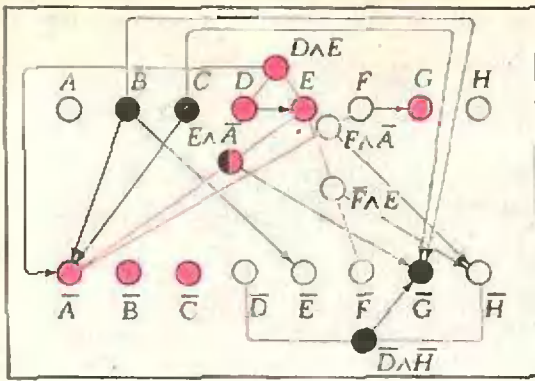


Рис. 5.

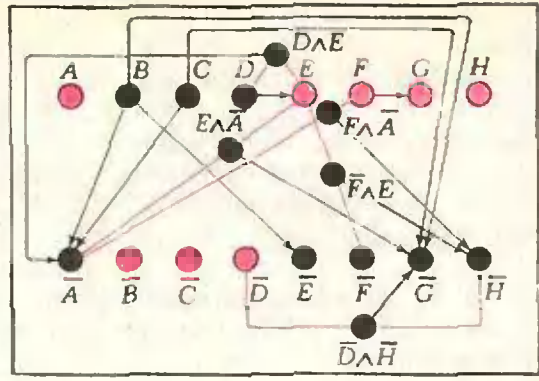


Рис. 6.

особо начертим пять вершин, изображающие конъюнкции: $(D \wedge E)$, $(F \wedge \bar{A})$, $(\bar{F} \wedge E)$, $(\bar{D} \wedge \bar{H})$ и $(E \wedge \bar{A})$.

Вершины, изображающие конъюнкции вида $X \wedge Y$, будем называть результирующими вершинами, а вершины X и Y их составляющими (скажем, вершина $F \wedge \bar{A}$ является результирующей составляющих F и \bar{A}). Каждую результирующую свяжем с двумя ее составляющими неориентированными ребрами красного цвета. Импликации, содержащиеся в условии задачи, изобразим как в задаче 1 (рис. 5).

Правила раскрашивания 1—4 будем использовать и при раскрашивании графа на рисунке 5. Кроме того, мы введем дополнительные правила 9—13:

Правило 9

Если X — истинно и Y — истинно, то и $X \wedge Y$ — истинно.

Если обе составляющие — красные, то и результирующая — красная.

Правило 10

Если $X \wedge Y$ — истинно, то X и Y — истинны.

Если результирующая — красная, то и обе составляющие — красные.

Правило 11

Если X или Y ложно, то и $X \wedge Y$ ложно.

Если одна из составляющих — черная, то и результирующая — черная.

Правило 12

Если $X \wedge Y$ ложно, а X истинно, то Y ложно.

Если результирующая — черная, а одна из составляющих — красная, то другая — черная.

Правило 13

Если некоторое допущение исключает возможность пригласить несколько гостей, а всех остальных можно пригласить, не получая противоречий, то так и следует поступить (для максимизации приглашенных).

Если допущение о цвете одной из вершин приводит к тому, что часть вершин вида X — черные, а остальные можно сделать красными, не получая противоречий, то так и следует поступить (для максимизации числа красных вершин).

Пользуясь правилами 1—4 и 9—13, раскрасим граф на рисунке 5:

1. Допустим, что G — красная:

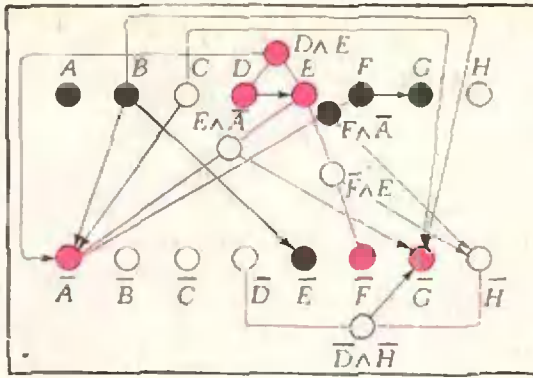


Рис. 7.

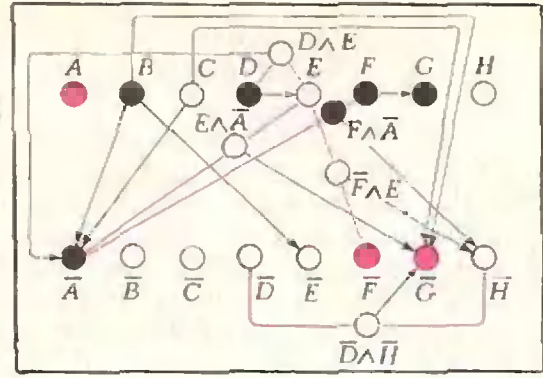


Рис. 8.

1) \bar{G} — черная (4); 2) B — черная (3); 3) C — черная (3); 4) $E \wedge \bar{A}$ — черная (3); 5) $\bar{D} \wedge \bar{H}$ — черная (3); 6) \bar{B} и \bar{C} — красные (4).

Допустим теперь (руководствуясь правилом 13), что D красная:

7) E — красная (2); 8) $D \wedge E$ — красная (9); 9) \bar{A} — красная (2); 10) $E \wedge \bar{A}$ — красная (9).

Но по правилу 1 $E \wedge \bar{A}$ не может быть одновременно черной (шаг 4) и красной (шаг 10), значит, если G — красная, то D — черная.

Построим новый граф (рис. 6) и восстановим на нем результаты первых шести шагов. Раскрасим граф на рисунке 6, считая, что D — черная:

11) \bar{D} — красная (4); 12) $D \wedge E$ — черная (11); 13) \bar{H} — черная (12); 14) H — красная (4); 15) $F \wedge \bar{A}$ — черная (3); 16) $\bar{F} \wedge E$ — черная (3).

Допустим, что E — красная (13):

17) \bar{E} — черная (4); 18) \bar{F} — черная (12); 19) F — красная (4); 20) \bar{A} — черная (12); 21) A — красная (4).

Следуя правилу 13, мы сделали красными все три оставшиеся вершины: E , F и A . Тогда из графа рисунка 6 следует, что если пригласить G , то, кроме того, можно пригласить \bar{A} , \bar{E} , \bar{F} и \bar{H} (всего 5 гостей).

В рассмотренном варианте (при допущении « G — красная») черными оказались три вершины B , C и D . Проверим, можно ли в случае « G — черная» получить не менее пяти красных вершин, то есть не более трех черных.

II. Допустим, что G — черная (рис. 7). Тогда:

1) \bar{G} — красная (4); 2) F — черная (3); 3) \bar{F} — красная (4); 4) $F \wedge \bar{A}$ — черная (11).

Пусть теперь D — красная (13):

5) E — красная (12); 6) \bar{E} — черная (4); 7) B — черная (3);

8) $D \wedge E$ — красная (9); 9) \bar{A} — красная (2); 10) A — черная (4).

Таким образом, уже четыре вершины оказались черными (A , B , F , G).

Перечертим граф рисунка 7 (рис. 8) — восстановим результаты первых четырех шагов и допустим, что D — черная. Тогда уже три вершины — черные (D , F и G), и значит, чтобы получилось не менее пяти красных вершин, необходимо сделать красными все остальные вершины вида X . Но это невозможно, так как если A — красная, то

11) \bar{A} — черная (4); 12) B — черная (3).

Таким образом, допущение « G — черная» не дает более четырех красных вершин вида X . Наибольшее число таких вершин (пять) дает допущение « G — красная».

Ответ следует из графа рисунка 6:

N мог пригласить максимум пять гостей: A, E, F, G и H .

З а м е ч а н и е. При рассмотрении всех четырех вариантов раскрашивания (рис. 5—8) можно было ограничиться лишь одним графом. Для этого его вершины нужно было выполнить в виде кружочков достаточно большого диаметра, разделенных на четыре квадранта, и при рассмотрении каждого варианта закрашивать по одному квадранту.

* *
*

В заключение отметим, что задачи 1 (о наличии треугольника с одноцветными сторонами в графе с шестью вершинами и ребрами двух цветов) и 5 (о наличии такого треугольника в графе с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов) из статьи Л. Ю. Березной «О графах с цветными ребрами» допускают следующее интересное обобщение (предложенное на XIII Украинской республиканской олимпиаде юных математиков):

З а д а ч а 3

Последовательность $\{a_n\}$ задана с помощью рекуррентной формулы: $a_1 = 2$; $a_n = na_{n-1} + 1$. Доказать, что в графе с $a_n + 1$ вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

Воспользуемся методом математической индукции.

1. При $n = 1$ $a_1 = 2$. Число вершин $a_1 + 1 = 3$.

Граф является треугольником с ребрами одного цвета (то есть искомым треугольником).

2. Пусть при $n = k$ утверждение верно, то есть в графе с числом цветов k и числом вершин $a_k + 1$ существует треугольник с одноцветными сторонами. Пусть теперь $n = k + 1$. Тогда число вершин равно

$$a_{k+1} + 1 = [(k + 1) \cdot a_k + 1] + 1.$$

Выберем одну из вершин; назовем ее A . Она соединяется ребрами $k + 1$ цвета с вершинами, число которых $(k + 1) \cdot a_k + 1$. Среди этих ребер по крайней мере $a_k + 1$ — одного цвета (по «принципу Дирихле»*) для определенности — синего. Если одна из $a_k + 1$ вершин B связана с другой C синим ребром, то треугольник $\triangle ABC$ — искомым. Если же нет, синий цвет вовсе не использован в графе, состоящем из $a_k + 1$ вершины, и тогда там использованы только k цветов. В этом графе (являющемся частью исходного) по предположению имеется искомым треугольник, а значит, он имеется и в исходном.

Утверждение доказано.

В частности, при $n = 2$ (два цвета) $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $a_2 + 1 = 6$ (шесть вершин); при $n = 3$ (три цвета) $a_3 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$, $a_3 + 1 = 17$ (семнадцать вершин).

(Во всех этих задачах имеются в виду *полные* графы, у которых любая пара вершин соединена ребром.)

*) См. «Квант», 1971, № 7.



С.Г. СЕМЕНЧИНСКИЙ

ЛИНЗЫ, ЗЕРКАЛА И АРХИМЕД

Широко распространена легенда о том, что Архимед с помощью зеркал сжег вражеский флот, стоящий на якорях в Сиракузах.

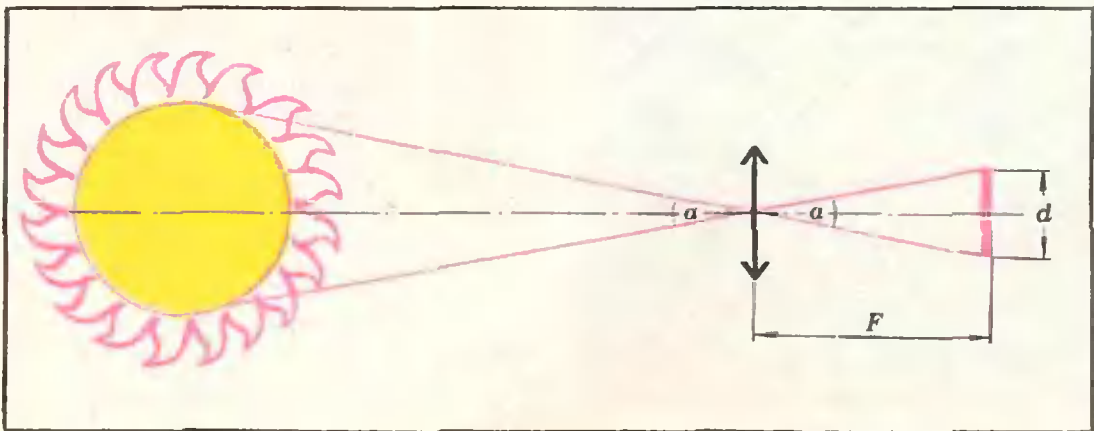
Давайте попробуем взглянуть на эту легенду с точки зрения современной физики и определим условия, при которых можно зажечь что-либо при помощи зеркала или линзы.

Наши расчеты будут опираться на тот факт, что энергия, излучаемая с единицы поверхности нагретого тела за единицу времени, пропорциональна четвертой степени температуры тела (это утверждение называется законом Стефана — Больцмана). Если энергия, подводимая к телу, больше энергии, излучаемой телом, то тело нагревается. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока излучаемая за единицу времени энергия не сравняется с подводи-

мой *). Отсюда следует, что для нагревания тела до температуры T на единицу его поверхности должен падать поток энергии, пропорциональный T^4 .

Возьмем линзу, площадь поверхности которой S , а фокусное расстояние F , и с ее помощью получим изображение Солнца на какой-нибудь поверхности. Весь поток солнечной энергии, падающий на поверхность линзы, соберется в фокальной плоскости линзы в пятнышко, диаметр которого $d = 2F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

*) Мы пренебрегаем теплопроводом от тела из-за теплопроводности воздуха. Опыт показывает, что при температуре воспламенения дерева этот теплоотвод мал по сравнению с излучением.



а площадь $S = \frac{4\pi F^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$, где α — угловой размер Солнца (см. рисунок). Взяв угол $\alpha = 30'$, получим

$$S = \frac{\pi F^2}{4 \cdot (110)^2}$$

(так как $2\operatorname{tg} 15' \approx \frac{1}{110}$). Поток энергии, падающий на единицу поверхности изображения Солнца в линзе, в $\frac{S}{s}$ раз больше, чем без линзы. Из закона Стефана — Больцмана следует, что установившаяся температура T в фокусе будет в $\left(\frac{S}{s}\right)^{1/4}$ раз больше, чем температура T_0 , до которой Солнце может нагреть предметы без линзы. Тогда связь между площадью линзы (или зеркала) и температурой в ее фокусе можно записать следующим образом:

$$S = \frac{\pi F^2}{4 \cdot (110)^2} \frac{T^4}{T_0^4}. \quad (1)$$

Из литературы *) известно, что для того чтобы зажечь, например, бумагу, требуется температура около 250 С, то есть около 520 К, а для сухого дерева необходимо увеличить эту температуру до 500—700 С, то есть примерно до 800—1000 К.

Эксперимент, проведенный французским натуралистом Бюффеном, показал, что действительно можно зажечь кусок сухого, пропитанного смолой дерева на расстоянии 158 футов (около 47 метров). Прибор Бюффона представлял собой сооружение из 168 зеркал, площадью 48 квадратных дюймов (примерно 310 см²) каждое, укрепленных на общей раме. Очевидно, что дерево, пропитанное смолой, зажечь легче, чем не пропитанное. Поэтому будем считать, что пропитанное смолой дерево загорается при меньшей из приведенных темпе-

ратур, то есть при 800 К. Тогда по формуле (1), положив $T_0 \approx 60^\circ \text{C} \approx 330 \text{ K}$, получим $S \approx 4,9 \text{ м}^2$, а общая площадь зеркал в эксперименте Бюффона была равна 5,2 м². Таким образом, опыты Бюффона не противоречат нашей теории.

Теперь попробуем рассчитать площадь зеркала, которое могло понадобиться Архимеду. Будем считать, что корабли были сделаны из того же материала, что и дощечка Бюффона. Расстояние от зеркала до кораблей, если верить легенде, было равно расстоянию арбалетного выстрела, то есть около 400 метров *). В этом случае $S \approx 350 \text{ м}^2$. Но Архимеду надо было не просто зажечь корабли, ему надо было зажечь их быстро, так как корабли могли двигаться и, не в пример бюффоновой дощечке, они не стали бы ждать, пока их подожгут. Расчет времени, за которое дерево нагревается до температуры возгорания, весьма громоздок и сложен, так как необходимо учитывать, например, теплоемкость и теплопроводность дерева. Поэтому воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в книге Лоусона «Атомная бомба и пожары» **). По этим данным для того чтобы за 20 секунд зажечь дубовые доски, необходима освещенность в 70 раз большая, чем освещенность предметов прямым солнечным светом в летнее время. Для создания такой освещенности площадь зеркала надо увеличить до 700 м². Сами по себе размеры зеркала не слишком велики — древние греки строили и более грандиозные сооружения. Однако отраженные от различных частей зеркала солнечные лучи должны собираться в одной точке, что требует весьма тщательного изготовления такого громадного зеркала. Но и это еще не все.

*) Дальность полета стрелы из арбалета взята из романа А. Конан Дойля «Белый отряд».

***) Д. Лоусон «Атомная бомба и пожары».

*) См. например, книгу Р. Берд-Берри «451 по Фаренгейту».

Положением «зайчика» от такого зеркала нельзя было бы управлять. Чтобы сделать зеркало управляемым оружием, нужно предусмотреть возможность изменения его фокусного расстояния, причем время такой перестройки должно быть очень коротким. Можно ли было в то время построить столь сложный прибор? По видимому, нет. Однако у Архимеда была другая возможность: выстроить на крепостной стене несколько тысяч человек с зеркалами (достаточно поставить 1400 человек с зеркалами по $0,5 \text{ м}^2$ каждое), которые направили бы «зайчики» от своих зеркал в заранее условленное место одного из кораблей. Если конструкция стен Сиракуз позволяла это сделать (что вполне возможно, так как Архимед сам принимал участие в их постройке) и если зеркала были приготовлены заранее, то все это можно было сделать достаточно быстро. Конечно, если бы римляне знали, зачем на стены Сиракуз выходят тысячи людей с зеркалами и чем им это грозит, то они, стреляя с галер, могли бы разогнать безоружных горожан. Но они не знали! После того, как вспыхнул первый корабль, остальные могли бы уйти, но очень вероятно, что возникла паника — ведь люди видели чудо. Так жители Сиракуз могли сжечь несколько кораблей и удалиться под защиту крепостных стен. Конечно, это только гипотеза, но ничего физически невозможного в ней нет.

Поджег или не поджег?

В польском журнале «Вокруг света» (№ 12, 1974 год) было напечатано сообщение еще об одной проверке предания, согласно которому Архимед сжег флот римлян, входивший в гавань Сиракузы.

Это предание подвергалось сомнению, так как техника того времени не позволяла построить собирающее зеркало таких размеров, чтобы направленный им световой поток мог поджечь корабль на достаточно большом расстоянии. Считалось, что это — легенда, сочиненная греческими сказителями.

Но если нельзя построить одно большое зеркало, то можно взять несколько малых зеркал. В декабре 1973 года греческий физик Ионас Саккос проверил эту гипотезу на опыте, но не в Сиракузах, а в Афинском порту. В его распоряжение были предоставлены 70 солдат и копия римского деревянного корабля. Каждому из солдат был вручен отполированный лист меди размером $150 \times 90 \text{ см}$, прикрепленный к держателю. Солдаты должны были направить отраженный солнечный свет в одно место на борту корабля, расположенного на расстоянии 200 м от берега.

После нескольких попыток удалось собрать все зайчики в одном месте на борту корабля. Через две секунды корабль задымил, а через три секунды вспыхнул. Прошла минута, и остатки корабля скрылись под водой.

Так декабрьский день 1973 года принес новую победу Архимеду.

В. И. Булат

А.А. ЕГОРОВ

РЕШЕТКИ и ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ



В этой статье разбираются три тесно связанные между собой вопроса.

- 1) Можно ли расположить правильный n -угольник на листе линованной бумаги — в прямую или косую клетку — так, чтобы его вершины попали в точки пересечения линий?
- 2) При каких углах α , соизмеримых с полным — то есть содержащих целое или рациональное число градусов, значения синуса, косинуса или тангенса α рациональны?
- 3) В какие положения может попасть центр правильного n -угольника, который разрешается перекачивать по плоскости (последний вопрос составлял содержание задачи М252 из «Задачника «Кванта»).

§ 1. Точечные решетки на плоскости

Рассмотрим на плоскости сетку, образованную двумя семействами параллельных прямых, разрезающих плоскость на одинаковые параллелограммы (рис. 1).

Множество всех вершин этих параллелограммов назовем *точечной решеткой*, сами вершины — узлами решетки, а любой из параллелограммов разбиения — *основным параллелограммом* разбиения, или *параллелограммом*, *порождающим* решетку.

Заметим, что одна и та же решетка может получиться из разных сеток прямых: на рисунке 2 изображена

так называемая *целочисленная* решетка, то есть множество точек, имеющих в декартовой системе координат целочисленные координаты. Целочисленную решетку вместе с сеткой прямых, параллельных осям координат, можно представлять себе как бесконечный лист клетчатой бумаги (тогда основным параллелограммом будет квадрат со стороной 1). Ту же самую целочисленную решетку можно получить, проводя красные прямые (тогда основным параллелограммом служит параллелограмм $ABCD$).

Таким образом, понятие основного параллелограмма решетки связано

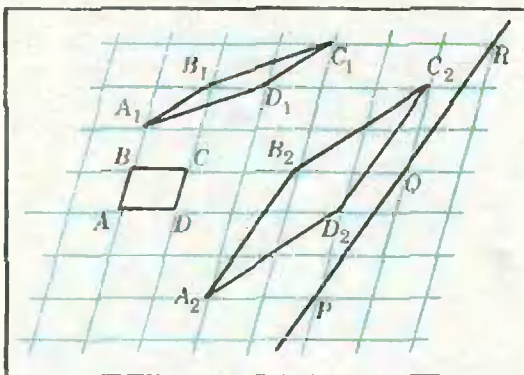


Рис. 1.

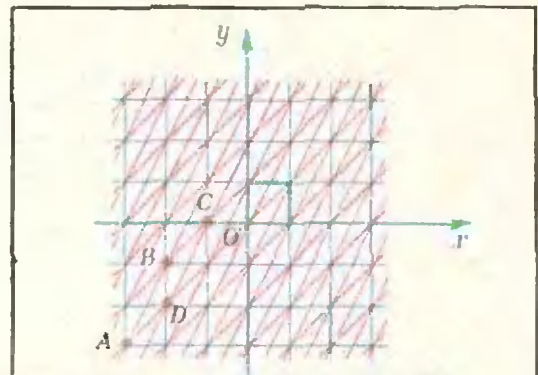


Рис. 2.

не только с самой решеткой, но и с сеткой прямых, эту решетку порождающих.

Из простейших свойств решеток пока отметим следующие.

1°. Всякий параллельный перенос, переводящий некоторый узел решетки в другой узел, переводит решетку в себя.

2°. (*Лемма о четвертой вершине параллелограмма*). Если три вершины параллелограмма являются узлами некоторой решетки, то и четвертая вершина — тоже узел этой решетки.

3°. Если через произвольные два узла Q и R решетки провести прямую, то эта прямая пройдет через бесконечное количество узлов. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на прямой, будут равны (см. рис. 1).

4°. Если параллелограмм с вершинами в узлах некоторой решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

Упражнения

1. Докажите свойства 1°—4°.

2. Пусть a и b — любые действительные числа. Докажите, что множество всех точек с координатами (ka, lb) , где k и l — целые числа, является решеткой.

Важное свойство решеток отражает следующая задача — шутка:

В некотором узле A решетки находится охотник, а в остальных узлах сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы (см. рис. 3, а). Охотник наугад стреляет (траектория пули — луч, выходящий из точки A). Вернется ли он домой с добычей? (Зайцы считаются «толстыми».)

Понятно, что если траектория пули проходит через узел (отличный от точки A), то заяц, сидящий в этом узле, будет убит. Поэтому интересен только тот случай, когда узел A — единственный на траектории пули; оказывается, что и в этом случае какой-нибудь заяц будет убит. Доказательство содержится в следующей лемме.

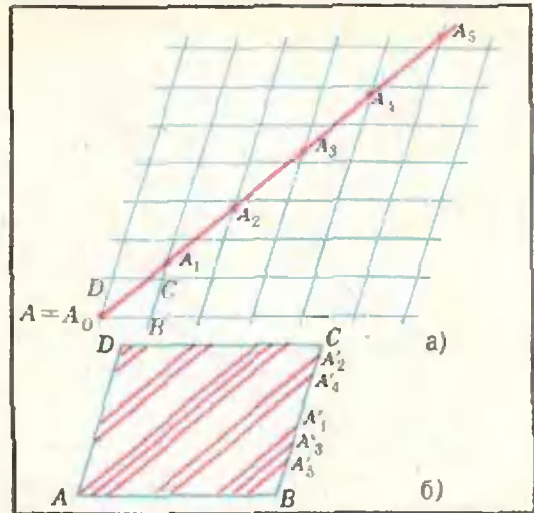


Рис. 3.

5°. (*Лемма об охотнике и зайцах*). Пусть луч l проходит через узел A некоторой решетки. Тогда найдется такой узел, расстояние от которого до луча l будет меньше любого наперед заданного числа ε .

Доказательство. Обозначим точки пересечения луча l с наклонными прямыми сетки через $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ (см. рис. 3). Совместим все параллелограммы, на правых сторонах которых лежат эти точки, с параллелограммом $ABCD$, тогда каждая точка A_n перейдет в некоторую точку A'_n на стороне AB .

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки A'_m и A'_{m+k} , что расстояние между ними будет меньше ε .

Докажите теперь, что расстояние от точки A_k до одного из узлов решетки меньше ε (в частности, если A'_m совпадает с A'_{m+k} , то A_k будет узлом решетки).

Следствие. Для любого иррационального числа $\alpha > 0$ и любого положительного ε найдутся такие натуральные m и n , что $|m\alpha - n| < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем на плоскости декартову систему координат и проведем прямую $y = \alpha x$. В силу иррациональности α , единственной точкой с целочисленными координатами на этой прямой будет начало координат. Прямая $y = \alpha x$ пересекает каждую вертикальную прямую $x = m$ в точке $(m, m\alpha)$. По лемме 5° найдется такой узел (m, n) целочисленной решетки, что расстояние (по вертикали) от него до точки $(m, m\alpha)$ будет меньше ε , что и требовалось доказать.

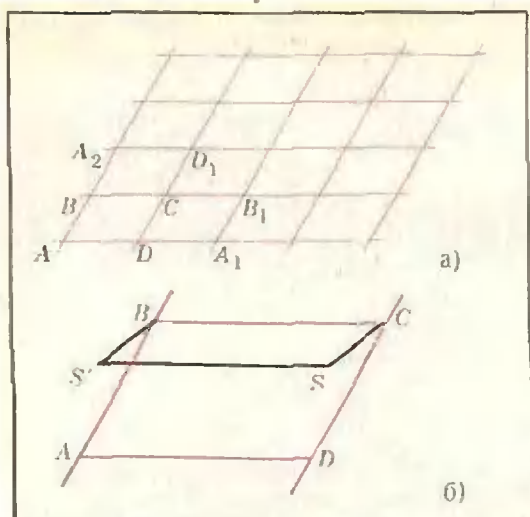


Рис. 4.

Легко видеть, что среди всевозможных попарных расстояний между узлами любой решетки есть наименьшее (докажите!).

Это свойство вместе со свойством 2^2 решетки можно принять за определение решеток.

Теорема. Пусть множество M на плоскости обладает следующими свойствами:

а) расстояние между любыми двумя его точками не меньше некоторого положительного числа d ;

б) если три точки A, B, C множества M являются вершинами некоторого параллелограмма $ABCD$, то и четвертая вершина D этого параллелограмма принадлежит множеству M .

Тогда M — решетка.

Доказательство. Возьмем произвольную точку B , принадлежащую множеству M .

Пусть A — ближайшая к B точка из M (рис. 4, а; такая точка существует, так как все попарные расстояния между точками множества M больше d).

Через точки A и B проведем прямую. Среди точек множества M , не лежащих на этой прямой, выберем ближайшую к точке B — точку C — и построим параллелограмм $ABCD$. В силу свойства б) точка D также принадлежит множеству M .

Построим решетку, порождаемую параллелограммом $ABCD$. Докажем, что множество M совпадает с построенной решеткой.

Из свойства б) множества M следует, что все узлы этой решетки ему принадлежат

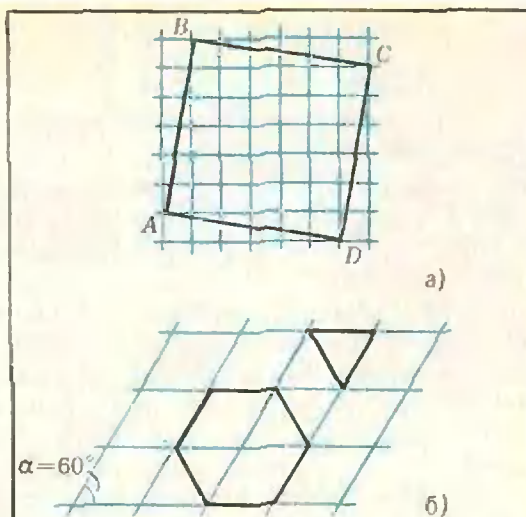


Рис. 5.

Упражнение 3. Докажите это. Поэтому нужно только проверить, что ни на границе, ни внутри параллелограмма $ABCD$ нет точек множества M , отличных от его вершин.

Это почти очевидно: если точка S лежит внутри параллелограмма (рис. 4, б), то хотя бы один из углов \widehat{ASB} , \widehat{BSC} , \widehat{CSD} и \widehat{ASD} будет тупым или прямым, и поэтому расстояние от S до одной из его вершин окажется меньше какой-нибудь его стороны (если S лежит на границе — то же самое); пусть, например, это расстояние SC . Построим параллелограмм $BCSS'$ (S' принадлежит M). Тогда BS' меньше либо BC , либо BA , но это противоречит выбору либо точки C , либо точки A .

Остальные случаи разберите самостоятельно.

Теорема доказана.

Упражнения

4. Пусть α — произвольное иррациональное число. Докажите, что для любого $\epsilon > 0$ и любого действительного числа β найдутся такие целые числа m и n , что $|m\alpha + n - \beta| < \epsilon$.

5*. Докажите, что десятичная запись числа 2^k может начинаться с любой, наперед заданной комбинации цифр.

§ 2. Правильные многоугольники

Возьмем лист клетчатой бумаги. Понятно, что квадрат с вершинами в узлах такой решетки можно нарисовать многими способами (рис. 5, а). А можно ли на клетчатой бумаге нарисовать правильный треугольник? Правильный шестиугольник?

Оказывается, нельзя.

Упражнение 6. Докажите это.

В то же время легко построить решетку, на которую правильный треугольник уже можно «поместить» (рис. 5, б).

Спрашивается, а как обстоят дела с остальными правильными многоугольниками? Существует ли, например, решетка, на которую можно было бы «поместить» правильный пятиугольник так, чтобы все его вершины оказались узлами этой решетки?

Оказывается, такой решетки нет. Действительно, предположим, что нам удалось построить решетку так, что вершины правильного пятиугольника оказались в ее узлах (см. рис. 6). Проведем диагонали этого пятиугольника. По лемме 2 § 1 точки пересечения диагоналей являются узлами решетки: каждая из них служит четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого — узлы решетки (точка A_1 , например, — вершина параллелограмма A_1CDE). Эти точки образуют правильный пятиугольник со стороной в $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ раз

большей стороны исходного пятиугольника. Проведя диагонали нового пятиугольника, получим еще меньший пятиугольник с вершинами в узлах нашей решетки и так далее. В конце концов сторона пятиугольника станет меньше минимального расстояния между узлами решетки,

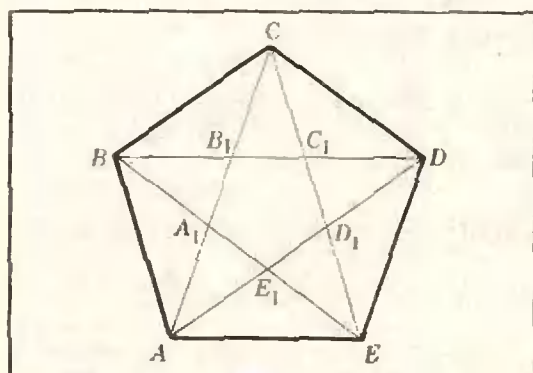


Рис. 6.

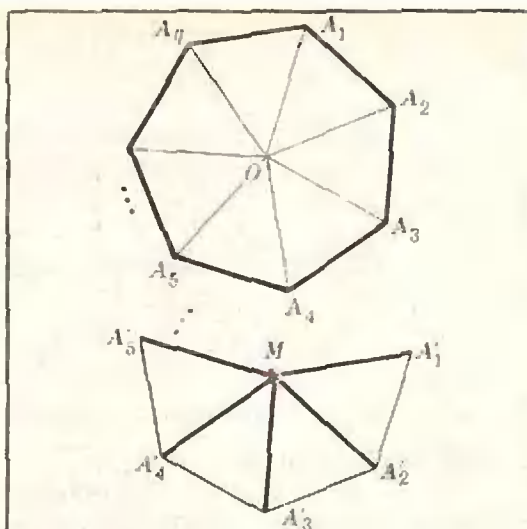


Рис. 7.

а это находится в противоречии с тем, что вершины получающихся пятиугольников — узлы решетки.

Упражнение 7. Найдите k .

Итак, правильный пятиугольник не может быть «нарисован» ни на одной решетке.

Докажем, что точно так же обстоит дело и с остальными правильными q -угольниками при $q \geq 7$.

Доказательство основывается на той же идее; предполагается, что правильный q -угольник с вершинами в узлах решетки существует, и строится меньший q -угольник с вершинами в узлах. Затем процесс построения повторяется. В конце концов получается правильный q -угольник со стороной, меньшей минимального расстояния между узлами. Поэтому нам нужно только указать, как по данному правильному q -угольнику с вершинами в узлах решетки построить меньший правильный q -угольник, вершины которого будут также находиться в узлах нашей решетки.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_q — узлы некоторой решетки, являющиеся вершинами правильного q -угольника, и пусть M — произвольный узел решетки (рис. 7). Отложим от точки M отрезки $MA'_1, MA'_2, MA'_3, \dots, MA'_q$, равные, параллельные и так же на-

правленные, как сторона $A_q A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{q-1} A_q$ нашего многоугольника. Точки $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_q$ — узлы решетки, так как каждая из них является четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого — узлы.

Легко видеть, что многоугольник $A'_1 A'_2 \dots A'_q$ — правильный, причем длина его стороны в $k_q = \frac{|A_1 A_2|}{|OA_1|}$ раз больше длины стороны исходного q -угольника.

Тем самым вопрос о правильных многоугольниках, «помещающихся» на точечных решетках, полностью решен: такими многоугольниками являются только квадраты, правильные треугольники и правильные шестиугольники.

У п р а ж н е н и я

8. Найдите k_q .

9. Существуют ли решетки, кроме целочисленной, на которые можно поместить квадрат?

10. Приведите пример решетки, отличной от изображенной на рисунке 5, б, на которую можно поместить правильный треугольник.

11. Существует ли решетка, на которую помещаются и квадрат, и правильный треугольник?

12. (Н. Б. Васильев). На плоскости проведены параллельные прямые на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Какие правильные n -угольники можно нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины лежали на проведенных прямых?

§ 3. Иррациональность значений тригонометрических функций.

Сможете ли вы ответить на такой вопрос: рациональны или иррациональны числа $\sin 1^\circ, \cos \frac{\pi}{19}, \operatorname{tg} \frac{7}{55} \pi$?

Или на такой: соизмеримы *) ли числа π и $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$?

*) Напомним, что два числа α и β называются соизмеримыми, если их отношение — рационально, то есть если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ где p и q — целые числа и $q > 0$.

И вообще: для каких углов $\alpha = \frac{p}{q} \pi$ (p и q целые) будут рациональными числа: а) $\cos \alpha$; б) $\sin \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$?

Ясно, что $\cos \alpha$ рационален при

$$\alpha = \frac{k\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{2} (3k \pm 1);$$

$$\sin \alpha \text{ — при } \alpha = \frac{k\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{6} (6k \pm 1);$$

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ — при } \alpha = k\pi \text{ и } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

(k — целое).

Мы увидим, что при остальных $\alpha = \frac{p}{q} \pi$ значения всех трех функций иррациональны.

Для доказательства нам понадобятся следующие простые факты из тригонометрии:

1. Для всякого натурального n функция $\cos nx$ является многочленом n -й степени от $\cos x$ с целыми коэффициентами, то есть

$$\cos nx = P_n(\cos x),$$

где $P_n(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n .

2. Функция $\sin nx$ является произведением функции $\sin x$ на некоторый многочлен степени $n-1$, относительно $\cos x$, с целыми коэффициентами, то есть

$$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x),$$

где $Q_{n-1}(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени $n-1$.

У п р а ж н е н и е 13. Докажите эти утверждения.

Отметим простые следствия этих утверждений;

а) если $\cos x$ — рациональное число, то $\cos nx$ — тоже рациональное число, а числа $\sin x$ и $\sin nx$ соизмеримы (при $\sin nx \neq 0$);

б) если p и q взаимно простые числа и $\cos \frac{p}{q} \pi$ рациональное число, то число $\cos \frac{\pi}{q}$ также рационально.

Докажем б) (свойство а) очевидно).

Заметим, что если p и $q > 1$ взаимно просты, то существует такое натуральное

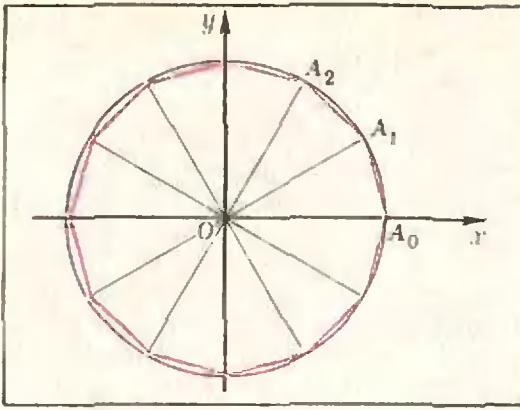


Рис. 8.

число k , что число kr при делении на q дает в остатке 1, то есть $kr = lq + 1$.

Упражнение 14. Докажите это.

Поэтому если число $\cos \frac{p}{q} \pi$ рационально, то рационально и число

$$\begin{aligned} \cos k \left(\frac{p}{q} \pi \right) &= \cos \left(\frac{lq + 1}{q} \pi \right) = \\ &= (-1)^l \cos \frac{\pi}{q}. \end{aligned}$$

Если же рационально число $\cos \frac{\pi}{q}$, то рационально и $\cos \frac{p}{q} \pi$ при любом целом p (см. утверждение 1).

Итак, число $\cos \frac{p}{q} \pi$ при взаимно

простых p и $q > 1$ рационально тогда и только тогда, когда рационален $\cos \frac{\pi}{q}$.

Теперь докажем, что $\cos \frac{\pi}{q}$ иррационален при всех натуральных $q > 3$.

Предположим, что $\cos \frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1}$ — рациональное число (m_1 и n_1 — натуральные).

Введем на плоскости декартову систему координат и проведем лучи, образующие с положительным направлением оси x углы $0, \frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}, \dots$

$$\dots, \frac{2q-1}{q} \pi.$$

Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2q-1}$ — точки пересечения этих лучей с единичной окружностью (рис. 8).

Многоугольник $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2q-1}$ правильный; точка A_k имеет следующие координаты:

$$\left(\cos \frac{k}{q} \pi, \sin \frac{k}{q} \pi \right).$$

Так как $\cos \frac{\pi}{q}$ рационален, то абсцисса точки A_k — число рациональное:

$$\cos \frac{k}{q} \pi = p_h \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{m_h}{n_h};$$

ордината же ее равна произведению рационального числа $Q_h \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{r_h}{s_h}$ на число $\sin \frac{\pi}{q}$ (см. упражнения 13 и 14; $k = 1, 2, \dots, 2q-1$; координаты точки $A_0 = (1, 0)$).

Итак,

$$A_k = \left(\frac{m_h}{n_h}, \frac{r_h}{s_h} \cdot \sin \frac{\pi}{q} \right).$$

Приведем все дроби $\frac{m_h}{n_h}, \frac{r_h}{s_h}$ к общему знаменателю; обозначим его через D . Тогда

$$A_k = \left(\frac{M_h}{D}, \frac{N_h}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{q} \right),$$

M_h и N_h — целые, $k = 1, 2, \dots, 2q-1$.

Рассмотрим теперь все точки с координатами

$$\left(\frac{i}{D}, \frac{j}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{q} \right)$$

(i и j — целые) — эти точки образуют решетку (см. упражнение 2), причем вершины нашего правильного $2q$ -угольника $A_0, A_1, \dots, A_{2q-1}$ являются ее узлами. Но этого не может быть (см. § 2), так как $2q \geq 8$. Поэтому наше предположение о том, что при $q > 3$ число $\cos \frac{\pi}{q}$ рационально, было неверным, и, следовательно, все числа $\cos \frac{p}{q} \pi$ ($q > 3$, p и q взаимно просты) иррациональны!

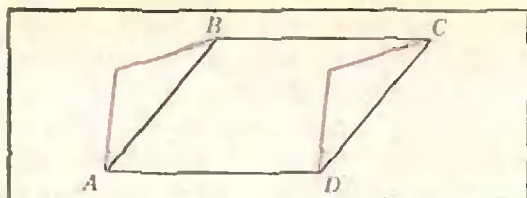


Рис. 9.

Упражнение 15. Пусть $q \geq 3$, p и q взаимно просты. Докажите, что

а) числа $\sin \frac{p}{q} \pi$ для $q \neq 5$ иррациональны;

б) то же для чисел $\lg \frac{p}{q} \pi$, если $q \neq 4$.

Полученные результаты можно сформулировать еще и так: числа $\arcsin \frac{p}{q}$, $\arccos \frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$, а также числа $\operatorname{arctg} \frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm 1$ (и взаимно простых p и q) несоизмеримы с числом π .

§ 4. Решение задачи M252

Итак задача M 252: а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a . Его разрешается «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки A плоскости и любого $\epsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки A на расстоянии меньше ϵ .

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в) Для каких правильных q -угольников верно аналогичное утверждение?

Мы приведем два решения этой задачи. Первое решение опирается на иррациональность чисел $\cos \frac{2\pi}{q}$ при $q > 4$, $q \neq 6$. Второе основывается на теореме, доказанной в § 1.

Прежде всего заметим, что утверждение задачи не справедливо для правильных треугольника и шести-

угольника, а также и для квадрата: в этих случаях точки, в которые попадает центр соответствующего многоугольника в результате «перекатываний», образуют решетку (докажите это!). Оказывается, что для всех остальных правильных q -угольников утверждение задачи верно — мы докажем, что каковы бы ни были точка A и $\epsilon > 0$, центр любого правильного q -угольника при $q \neq 3$, $q \neq 4$, $q \neq 6$ после некоторого количества «перекатываний» попадает в круг радиуса ϵ с центром в точке A .

Прежде чем приступать к доказательству, выясним некоторые свойства множества M тех точек плоскости, в которые переходит центр правильного q -угольника P после четного числа «перекатываний». Заметим, что q -угольник P' , получающийся из P после четного числа «перекатываний», расположен таким образом, что его стороны параллельны сторонам исходного. Поэтому мы можем считать, что P' получен из P параллельным переносом.

Лемма 1. Если три вершины параллелограмма A , B и C принадлежат M , то и четвертая его вершина D также принадлежит M .

Доказательство. Пусть точки A , B и C принадлежат M (см. рис. 9) и D — четвертая вершина параллелограмма. Ясно, что мы можем пройти из точки C в точку D , осуществляя те же параллельные переносы что и при переходе из точки B в точку A .

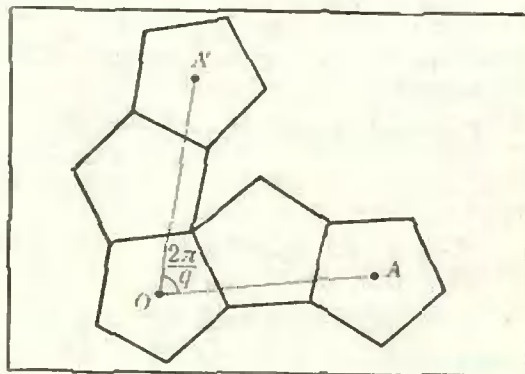


Рис. 10.

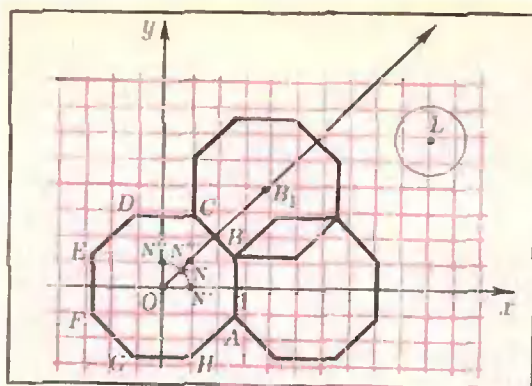


Рис. 11.

Лемма 2. Множество M переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг любой из его точек.

Доказательство. Построим цепочку q -угольников, примыкающих друг к другу по стороне и «соединяющих» наш q -угольник с центром в заданной точке O с q -угольником с центром в любой другой точке A множества M (рис. 10). При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг точки O эта цепочка многоугольников переходит в другую цепочку, соединяющую исходный многоугольник с q -угольником, центром которого является точка A' , полученная из A поворотом. Следовательно, точка A' также принадлежит множеству M .

Перейдем к доказательству сделанного утверждения.

Первое доказательство. Разберем сначала случай правильного восьмиугольника. (Будем считать, что апофема многоугольника равна 1.)

Введем на плоскости систему координат так, как показано на рисунке 11, и посмотрим, что происходит с координатами центров при «перекатывании» через стороны многоугольника P .

При «перекатывании» вдоль оси Ox ординаты центров не меняются, а абсциссы увеличиваются или уменьшаются на 2. При перекатывании вдоль биссектрисы первого координатного угла координаты точек либо увеличиваются, либо уменьшаются на $\sqrt{2}$.

Если сделать n шагов вдоль этой биссектрисы вправо — вверх, затем m шагов вдоль оси Ox влево и m шагов вдоль оси Oy вниз, то мы попа-

дем в точку N с координатами $(n\sqrt{2}-2m, n\sqrt{2}-2m)$ (см. рис. 11); так как $\sqrt{2}$ — число иррациональное, то (см. § 1) найдутся такие натуральные m и n , что

$$0 < n\sqrt{2} - 2m < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (*)$$

где ε — любое положительное число.

Отметим, что мы можем также прийти в точку N' , получающуюся из N поворотом на угол 45° по часовой стрелке, и в точку N'' , получающуюся из N поворотом на угол 45° против часовой стрелки.

Достроим треугольник $ON'N''$ до квадрата $ON'N''N'''$ и рассмотрим решетку, им порождаемую.

Так как стороны и диагонали квадрата $ON'N''N'''$ меньше ε (см. (*) и рисунок 11), то во всяком круге L радиуса ε окажется хотя бы один узел решетки. Но по лемме 1 все узлы этой решетки можно получить «перекатываниями» из центра восьмиугольника.

Тем самым про восьмиугольник все доказано.

Для остальных многоугольников (конечно правильных) доказательство проводится по той же схеме.

Второе решение. Это решение несколько короче первого и, пожалуй, нагляднее, но оно использует трудную теорему из § 1.

Как мы видели, достаточно доказать, что во множестве M найдутся сколь угодно близкие точки.

Предположим, что это не так, то есть предположим, что между точками множества M больше некоторого положительного числа d .

В силу теоремы из § 1 и лемм 1, и 2 множество M является решеткой, которая, к тому же, переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$. Из этого

немедленно следует, что существует правильный q -угольник с вершинами в ее узлах, а это возможно лишь при $q = 3$, $q = 4$ или $q = 6$.

Решение закончено.



М.В. ДОНСКОЙ

ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ ШАХМАТНЫХ ПРОГРАММ

В «Кванте» № 11 в статье «Машина играет в шахматы» было рассказано о том, как программа выбирает ход в шахматной позиции, и как организуется «полная игра» машины. В августе 1974 года состоялся чемпионат мира среди шахматных программ. О нем и рассказано в настоящей статье.

История турниров шахматных программ

В 1950 году английский математик Клод Шеннон предложил способ научить машину играть в шахматы — идею составления шахматной программы. У Шеннона не было своей программы, но его идея использована во всех существующих программах.

Первая действующая шахматная программа была создана в конце 50-х годов в Массачусетском технологическом институте Бернштейном. Она играла в силу начинающего игрока.

В 1957 году состоялся первый в истории шахматный матч вычислительных машин — матч между советской программой Института теоретической и экспериментальной физики и американской программой Стэнфордского университета. Матч из четырех партий закончился со счетом 3 : 1 (2 ничьих и 2 победы) в пользу советской программы.

В 1968 году на конгрессе ИФИП (Международной Федерации по обработке информации) ученые всерьез обсуждали возможность игры шахматных программ на уровне мастера. Все участники конгресса имели возможность на собственном опыте убедиться в прогрессе шахматного программирования — сыграть партию с

лучшей американской шахматной программой — программой Гринблатта. Машина чуть чаще проигрывала, но Гринблатт объяснил это тем, что математики всегда хорошие шахматисты.

На этом же конгрессе произошло забавное событие. Математики заключили пари с шахматным мастером Д. Леви, что через 10 лет будет создана программа, которая у Леви выиграет. По всей вероятности, математики это пари проиграют, но в лице Леви они получили самоотверженного организатора турниров шахматных программ.

Начиная с 1970 года ежегодно в Америке проводится чемпионат американских шахматных программ. Чемпионом уже четыре раза становилась программа «Чесс-4,0». На ее турнирном счету (до чемпионата мира) 13 побед, 1 ничья и ни одного поражения.

Последний американский чемпионат служил одновременно отборочным турниром на чемпионат мира. Лучшие четыре американские программы — «Чесс-4,0», «Теч-2», «Хаос» и «Острич» получили право играть на турнире.

На сегодняшний день в Америке существует около 50 шахматных программ, а в Европе только около 20. Однако чемпионат мира показал, что

главное не количество, а качество — чемпионом стала советская программа «Каисса».

Чемпионат мира — это всегда соревнование. Но чемпионат мира среди шахматных программ — не шахматное соревнование. Это — соревнование ученых. Ученых, а не программистов, потому что составить какую-нибудь шахматную программу при сегодняшнем уровне программирования, хотя и сложный, но все же — вопрос техники.

Основной центр тяжести падает на алгоритм — правила, по которым программа должна выбирать ход.

Ученые интересуются этими алгоритмами, потому что считают их существенным шагом на пути к обучению машины мышлению.

Один из аспектов мышления — выбор решения в сложной ситуации. Способы обучения ЭВМ такому выбору и оттачиваются на шахматных программах. Ученые считают, что не позднее чем через 3 года после того, как машина обыграет чемпиона мира по шахматам, будет создана думающая машина.

Как «Каисса» готовилась к чемпионату

Игра шахматной программы в турнире отличается от обычного выбора хода в спокойной обстановке. В чем же состояла подготовка к турниру?

Прежде всего время на обдумывание ходов у программы было жестко ограничено — 2 часа на 40 ходов. Если 2 часа истекали, когда программа еще не сделала 40 ходов, ей засчитывалось поражение (и таких поражений на турнире было немало). Значит, программа должна не только выбирать ход в позиции, но и следить за временем обдумывания.

Сначала мы поделили эти 2 часа на 40 ходов поровну, но такое решение оказалось неудачным по двум причинам.

Первая — неизвестно что делать с неиспользованным остатком вре-

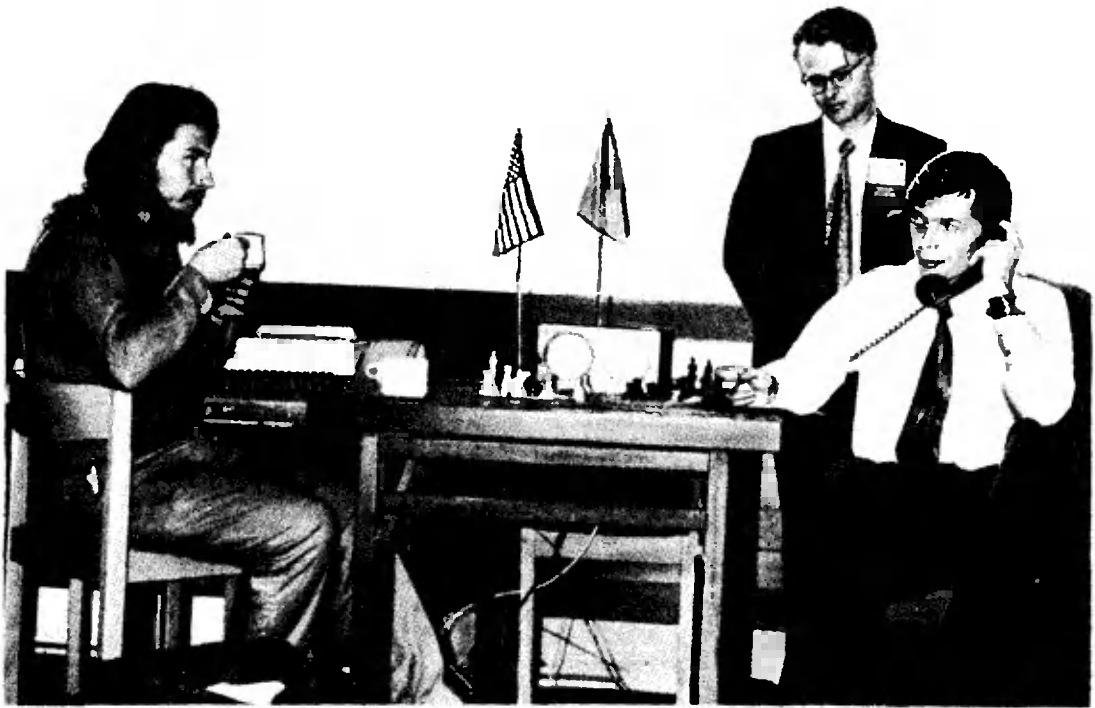
мени. В конце концов время стало перераспределяться перед каждым ходом.

Вторая причина более тонкая: в середине партии у программы больше пищи для размышления, чем в конце — больше фигур, велика их подвижность, напряженнее позиция. Поэтому мы решили первые 25 ходов давать программе возможность подумать побольше за счет остальных 15-ти, и это себя вполне оправдало.

Каким образом программа (во время перебора) понимает, сколько времени она думает? Мы не стали пользоваться обычными часами, которые есть в вычислительной машине и доступны программе, потому что «взгляд на часы» занимает у машины слишком много времени. Мы ввели в программу собственное измерение времени — число рассмотренных позиций за время выбора хода. Поскольку в секунду программа изучает около 200 позиций, то время в секундах, которое можно затратить на обдумывание, умножается на 200, и, когда число рассмотренных позиций превысит это произведение, программа прекращает рассмотрение и выдает в качестве ответа лучший из уже рассмотренных ходов.

Естественно, что чем больше времени на обдумывание имеет программа, тем больше возможностей она успеет рассмотреть до истечения контроля одного хода. Нам удалось использовать довольно большой резерв времени на обдумывание — то время, когда думает противник. Программа прогнозирует ход противника и начинает выбирать на него ответ так, как будто этот ход уже сделан. Когда противник отвечает, сначала проверяется, сделан ли ход, который ожидался. Если да, то время, пока противник думал, проведено с пользой. Если же нет, то во всяком случае мы ничего не потеряли.

Однако для того, чтобы вложить это в программу, потребовалось создание д и с п е т ч е р а — программы, которая ждет сообщения, разби-



На фотографии приведено начало партии с «Теч-2». Справа сидит один из авторов «Каиссы» — М. Донской, слева — автор «Теч-2» А. Бислей.

рается в нем, когда оно придет, и указывает шахматной программе, что делать дальше — продолжать выбирать ответ на спрогнозированный ход или вернуться и выбрать ответ на другой ход. Сложность этой программы можно оценить хотя бы по тому, что «Каисса» была единственной участницей чемпионата, думавшей за счет времени противника.

Специфически шахматная подготовка к турниру состояла во введении в машину справочной дебютов. Эта справочная к началу турнира содержала 10 000 позиций и, видимо, была самой объемистой на турнире. Во всяком случае только однажды — в партии с программой «Чесс-4,0» — противник сумел переиграть нас в дебюте (по-моему, специально к этому подготовившись).

Однако у этой справочной был любопытный недостаток. Она содержала новейшие дебютные идеи, которые, естественно, были вне понимания программы выбора хода. Когда справочная кончалась и надо было

выбирать ход, игровая часть программы не развивала позицию в духе этих идей, а пыталась проводить свои, более простые идеи, которые противоречили позиции. Это сразу же приводило к резкому ухудшению позиции и даже материальным потерям. Но потом благодаря тому, что какие-то идеи все-таки у программы были, она добивалась преимуществ во всех партиях. Только в последней, товарищеской это преимущество было получено слишком поздно — на доске остались король, ладья и конь против короля и ладьи, что является теоретической ничьей. Судья остановил часы.

Самым удивительным на турнире оказалась способность программ относительно хорошо играть эндшпиль. Практически все программы, в том числе и наша, содержали специальные знания про эндшпиль. В нашей программе это была оценочная функция, которая существенно отличалась от оценочной функции, применявшейся в середине игры. Это отли-

чне становится понятным, если, например, вспомнить, что в середине игры король должен быть как можно дальше от центра событий, а в конце, наоборот, в их гуще.

Заканчивая рассказ о специальной турнирной подготовке программы, я хочу напомнить, что основную роль в уровне игры все-таки играет перебор вариантов — его организация, что допускается в перебор, какими методами он сокращается. Отличие нашей программы от остальных в этой части было существенным благодаря некоторым новым идеям перебора, которые использует программа, но мне кажется, что это — предмет для более подробного разговора.

Чемпионат мира

Во время конгресса ИФИП в Стокгольме состоялся I чемпионат мира среди шахматных программ.

Советский Союз представляла программа «Каисса», созданная в Институте проблем управления Г. М. Адельсон-Вельским, В. Л. Арлазаровым, автором статьи и другими.

Партии проходили пять вечеров подряд в концертном зале отеля «Биргер яарл». Одновременно велись шесть партий, и внимание многочисленной публики (200—300 человек) переходило от одного поединка к другому. Для того чтобы публика не скучала, директор турнира международный мастер Д. Леви все время комментировал партии, и этот комментарий сразу же переводился на шведский язык.

На сцене стояли две малогабаритные вычислительные машины, шесть терминалов и одиннадцать телефонов, соединявших зал с разными городами Европы. Один такой телефон соединял зал с Институтом проблем управления в Москве, где работала «Каисса».

Турнир был полон неожиданностей и курьезов.

В первой партии против австрийской программы «Франц» «Каисса» после 30 хода вдруг стала подолгу думать, и если бы не поставила мат на 34-м ходу, то наверняка просрочила бы время. Это объясняется тем, что на 30-м ходу «Каиссы» в Москве наступила полночь, а «Каисса», не разобравшись с часами, решила, что ей остается на обдумывание больше 24 часов. Может быть, именно такая неторопливость и позволила ей найти матующую комбинацию.

Неожиданности продолжались и во втором туре в партии против «Теч-2». По правилам турнира в случае технических неполадок можно было взять получасовой перерыв на их исправление. Автор «Теча», утомившись затяжной партией 1-го тура (она продолжалась до 3-х часов ночи), попросту проспал начало тура и опоздал ровно на полчаса. Это ему было засчитано как перерыв на технические неполадки, и потом в течение партии он не имел право останавливать часы.

Неаккуратность автора «Теча» сказалась и в партии — он сделал не тот ход, который сообщила ему машина, и слишком поздно заметил это. Ход был возвращен назад, но это сбilo с толку «Каиссу» и привело ее к ошибке. В конце концов пришлось ввести эту позицию в машину заново и переиграть партию.

Технические ошибки наших противников стали недоброй традицией. В третьем туре уже после того, как в партии «Каиссы» с «Хаосом» была объявлена победа «Каиссы», авторы «Хаоса» заявили, что они ошиблись при вводе в свою машину предпоследнего хода «Каиссы». Они попросили разрешения переиграть партию с этого хода, но никто всерьез не рассчитывал, что мы примем это предложение, особенно после того, как Леви сказал, что если при переигровке у «Каиссы» сломается машина, то никакого прощения ей не будет. Тем не менее после консультации с Арлазаровым мы решили продолжать эту

партию, что было очень высоко оценено американскими программистами.

Несмотря на то, что «Каисса» довольно быстро поставила мат, это было существенно для наших противников, потому что в случае равенства очков предпочтение оказывалось той программе, которая быстрее выигрывала и дольше проигрывала.

Внимание местных газет к турниру ослабевало по мере того, как становилось понятнее, что «Каисса» будет чемпионом. Поздравления начались уже в третьем туре, но в четвертом мы имели много неприятностей от «Острича». Столик, за которым игралась наша партия, был вынесен на авансцену. Автор «Острича» — М. Ньюборн (зная, что «Каисса» хорошо разбирается в индийской защите) в последнюю минуту внес коррективы в свою дебютную справочную, заменив первый ход d4 на Kf3. Когда он увидел, что «Каисса» знает и этот дебют, он в буквальном смысле схватился за голову, поскольку «Острич» не имел в своей библиотеке ни одного продолжения.

Тем не менее в этой партии, как и в других, сказался основной недостаток нашей программы — несовместимость идей, заложенных в дебютную справочную, и идей, заложенных в игровую часть программы. В итоге «Каисса» начала с проигрыша качества. Когда, поддавшись панике, я посчитал, что для переигровки за первое место нам надо продержаться 48 ходов, из Москвы твердый голос Арлазарова заявил: «Все равно мы эту партию выиграем», хотя для победы в турнире хватило бы ничьей. И действительно, к двенадцати часам ночи дело приблизилось к развязке. «Каисса», отыграв две пешки, повела свои пешки в ферзи и закончила партию, как всегда, элегантно матом.

«Каиссе» была вручена золотая медаль чемпиона мира среди шахматных программ. Медаль вручали президент ИФИП австралийский ученый Земанек и английский издатель Макс-

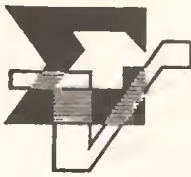
велл, на чьи деньги была сделана из чистого золота 110-граммовая медаль. Вручая медаль, Максвелл назвал нас первыми обладателями этой медали, из-за чего все корреспонденты сочли этот трофей переходящим. Однако потом Земанек официально объявил, что медаль вручена советским ученым навечно.

Организаторы турнира остались недовольны только тем, что лучшие программы турнира — «Каисса» и «Чесс-4,0» не сыграли друг с другом.

Поэтому мы решили сыграть товарищескую партию. На этот раз соперник вышел из дебюта не только с преимуществом, а просто в выигранной позиции — эндшпиль с двумя лишними проходными пешками. Уже поступило предложение в случае быстрого проигрыша «Каиссы» сыграть еще одну партию, поменявшись цветом фигур, но «Каисса» снова всех удивила — она сумела не только отыграть пешки, но и выиграть фигуру. Однако для победы этого преимущества не хватило.

После каждого тура участники собирались в «мирном» уголке зала и спокойно обсуждали научные результаты турнира и перспективы развития шахматного программирования. Эти обсуждения были очень полезны для участников.

Расставаясь, мы договорились встретиться на следующем конгрессе ИФИП в 1977 году в Канадском городе Торонто.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

ВОКРУГ ФОРМУЛЫ ПИКА

Н.Б. ВАСИЛЬЕВ

Чтобы оценить площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если S — площадь многоугольника, N_1 — число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и N_2 — число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хотя одну общую точку, то $N_1 \leq S \leq N_2$. (Этот факт можно использовать для того, чтобы дать точное определение площади многоугольника и других фигур.)

Мы будем рассматривать ниже только такие многоугольники, все вершины которых лежат в узлах клетчатой бумаги — в точках, где пересекаются линии сетки. Оказывается, что для таких многоугольников можно указать простую формулу:

$$S = \frac{r}{2} + i - 1,$$

где S — площадь, r — число узлов, которые лежат на границе многоугольника (то есть на сторонах и в вершинах), i — число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

Эту формулу называют иногда «формулой Пика» — по имени математика, открывшего ее в 1899 году. (Впрочем, нельзя быть уверенным в том, что эту естественную формулу, допускающую целый ряд различных доказательств, не придумал никто раньше.)

В нашей заметке и доказательство, и применения формулы Пика отчасти будут связаны с некоторыми задачами из «Задачника «Кванта».

Простые треугольники

Напомним, что мы рассматриваем только многоугольники, — в частности, треугольники — с вершинами в узлах клетчатой бумаги; каждый раз это специально не оговаривается. Лист клетчатой бумаги мы считаем бесконечным во всех направлениях, клетки — квадратами со стороной 1.

Площадь любого треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив ее как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершины нарисованного треугольника. Проделав это, например, для треугольников, изображенных на рисун-

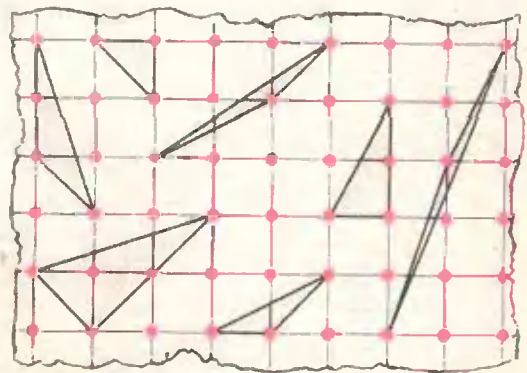


Рис. 1.

ке 1, вы убедитесь, что площадь получается всегда равной «полуцелому» числу — числу вида $m/2$, где m — целое.

Назовем треугольник *простым*, если ни внутри него, ни на его сторонах нет узлов сетки, за исключением вершин. (Такое название выбрано потому, что любой другой треугольник можно составить из простых; это одно из тех утверждений, которые понадобятся нам ниже.) Обратите внимание, что все простые треугольники на рисунке 1 имеют площадь $1/2$. Мы увидим, что это не случайно.

В решении задачи M226, опубликованной в «Кванте», 1974, № 6, читателям предлагалось подумать над такой задачей. Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 2; ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги). В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

Назовем треугольник *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трех вершинах одной клетки; прыжком будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

Теорема 1. Следующие три свойства треугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги эквивалентны друг другу:

- 1) треугольник имеет площадь $1/2$;
- 2) треугольник прост;
- 3) треугольник достижим.

В справедливости этой теоремы вы можете убедиться, доказав следующие 12 утверждений. Звездочкой отмечены те, к доказательству которых имеются указания в конце журнала. Остальные — почти очевидны, если доказывать их в таком порядке:

$$\begin{array}{ccccc} 3 \Rightarrow 4 & 1 \Rightarrow 2 & 10 & & \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 12 & & & & \end{array}$$

1. Площадь треугольника при прыжке не меняется.

2. Любой достижимый треугольник имеет площадь $1/2$.

3*. Если достроить простой треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то ни внутри, ни на сторонах этого параллелограмма не будет узлов (не считая вершин).

4*. Из простого треугольника при прыжке получается простой.

5*. У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника, у которого три вершины принадлежат одной клетке; такой простой треугольник — со сторонами $1, 1, \sqrt{2}$ мы будем называть *минимальным*).

6. Из любого простого не минимального треугольника можно одним прыжком получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

7*. Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный.

8. Любой простой треугольник достижим.

9. Любой простой треугольник имеет площадь $1/2$.

10*. Любой треугольник можно разрезать на простые.

11. Площадь любого треугольника равна $m/2$, причем при любом разрезании его на простые их количество равно m .

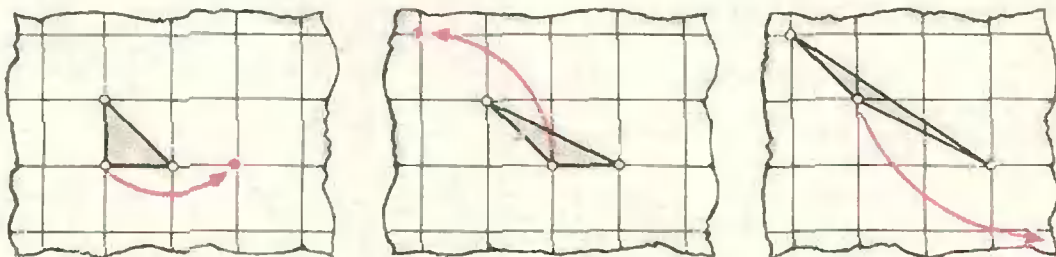


Рис. 2.

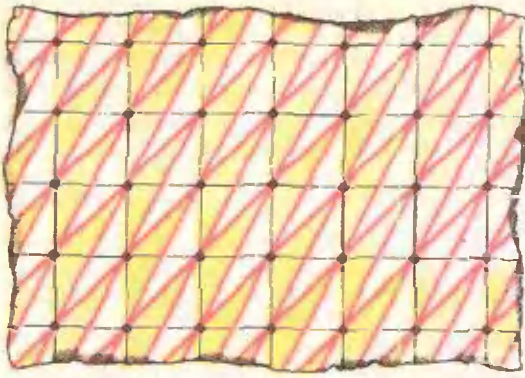


Рис. 3.

12. Любой треугольник площади $1/2$ — простой.

Ясно, что из утверждений 2, 8 и 12 вытекает теорема 1.

Докажите еще несколько свойств простых треугольников.

13. Для любых двух узлов A и B решетки, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC — простой.

14. Узел C в предыдущей задаче можно всегда выбрать так, что угол ACB будет тупым или прямым.

15. Параллелограмм тогда и только тогда порождает решетку, состоящую из всех узлов клетчатой бумаги (см. статью А. А. Егорова, с. 26), когда каждый из треугольников, на которые его делит диагональ, — простой.

То же самое свойство можно сформулировать так.

16. Треугольник ABC — простой тогда и только тогда, когда всевозможные треугольники, полученные из ABC параллельными переносами, переводящими узел A в различные узлы решетки, не накладываются друг на друга (рис. 3).

Вернемся теперь к задаче про трех кузнечиков. Пусть кузнечики в начальном положении занимают какой-то определенный (а не произвольный) минимальный треугольник — в первоначальной формулировке задачи именно это и предполагалось. Поскольку каждый кузнечик смещается при прыжке обязательно на четное число клеток по горизонтали и вертикали, то он обязательно попадает в узел «своей» решетки с размером клеток 2×2 . На рисунке 4 три из четырех «подрешеток», составляющих всю решетку, раскрашены в разные цвета (каждый кузнечик прыгает в узлы своего

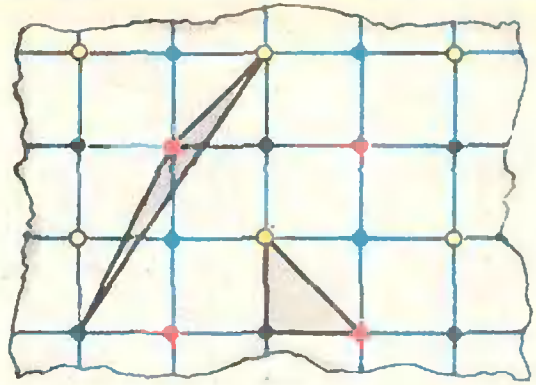


Рис. 4.

цвета), а четвертая — того же цвета, что и линии сетки.

Согласно теореме 1 кузнечики могут одновременно попасть в вершины простого треугольника.

Отсюда вытекает еще одно интересное свойство этих треугольников.

17. Если решетку — узлы клетчатой бумаги — разбить на четыре подрешетки с клетками 2×2 (рис. 4), то вершины простого треугольника обязательно попадут в три разные подрешетки (все три имеют разный цвет).

Теперь уже нетрудно доказать следующие два утверждения, дающие ответ к задаче о трех кузнечиках (в том случае, когда начальный треугольник фиксирован; рис. 4).

18. Три кузнечика могут одновременно попасть в те и только те тройки точек, которые служат вершинами простого треугольника и имеют тот же цвет, что и соответствующие вершины начального треугольника.

19. Два кузнечика могут одновременно попасть в те и только те пары узлов соответствующих цветов, на отрезке между которыми нет других узлов.

Триангуляция многоугольника

Мы подробно изучили частный вид многоугольников на клетчатой бумаге, которому в формуле Пика соответствуют значения $i = 0$, $r = 3$, $S = 1/2$. Но от этого частного случая можно перейти сразу к самому общему, воспользовавшись теоремой о разрезании на треугольники произвольного многоугольника (клетчатая бумага больше не нужна).

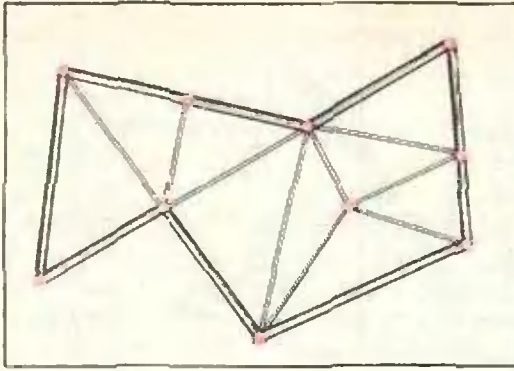


Рис. 5.

Пусть на плоскости задан некоторый (не обязательно выпуклый) многоугольник и некоторое конечное множество K точек, лежащих внутри многоугольника и на его границе (причем все вершины многоугольника принадлежат множеству K). *Триангуляцией с вершинами K* называется разбиение данного многоугольника на треугольники с вершинами в множестве K такое, что каждая точка из K служит вершиной каждому из тех треугольников триангуляции, которым эта точка принадлежит (то есть точки из K не попадают внутрь или на стороны треугольников, см. рис. 5).

Теорема 2. а) *Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на треугольники, причем количество треугольников будет равно $n-2$.* (Это разбиение — триангуляция с вершинами в вершинах n -угольника.)

б) Пусть на границе многоугольника отмечено r точек (включая все вершины), внутри — еще i точек. Тогда существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках, причем количество треугольников такой триангуляции будет равно $r + 2i - 2$.

Разумеется, а) — частный случай, б), когда $r = n$, $i = 0$. Доказательство этой теоремы мы снова разобьем на ряд простых утверждений.

20*. Из вершины наибольшего угла n -угольника ($n > 3$) всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

21. Если n -угольник разрезан диагональю на p -угольник и q -угольник, то $n = p + q - 2$.

22. Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на $n - 2$ треугольника.

23. Сумма углов n -угольника равна $180^\circ (n - 2)$.

24. Для любого треугольника, внутри и на границе которого отмечено несколько точек (в том числе — все три его вершины), существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках.

25. То же самое верно и для любого n -угольника.

26. Число треугольников триангуляции равно $r + 2i - 2$, где i и r — количество отмеченных точек соответственно внутри и на границе многоугольника.

Отсюда вытекает теорема 2.

27. Выведите из теорем 1 и 2 формулу Пика: $S = r/2 + i - 1$.

Прием, который удобно использовать в доказательстве утверждения 26 — подсчет суммы углов, — помогает и при решении других комбинаторных задач по геометрии, в частности, задач про разбиение многоугольника. Приведем еще два примера.

Назовем разбиение n -угольника на несколько многоугольников *правильным*, если каждая вершина одного из многоугольников разбиения служит вершиной всех других многоугольников разбиения, которым она принадлежит.

28. Если из вершин k -угольника, на которые разбит правильным образом n -уголь-

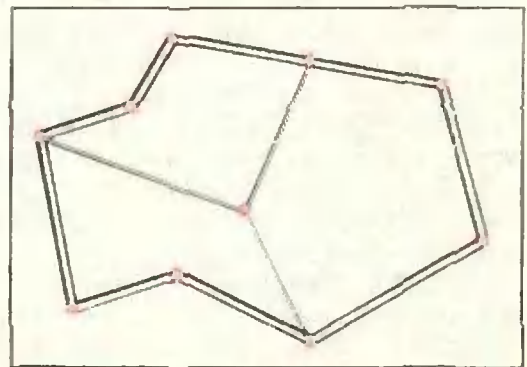


Рис. 6.

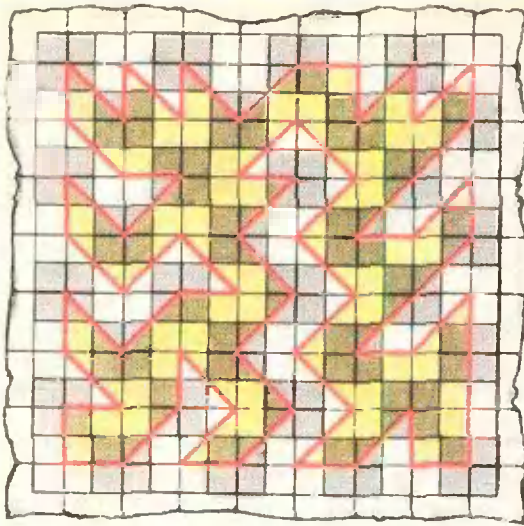


Рис. 7

ник, i вершины лежат внутри и r — на границе n -угольника, то количество k -угольников равно

$$m = \frac{r + 2i - 2}{k - 2}.$$

29 (Вариант «теоремы Эйлера»). Если N_0 точек плоскости и N_1 отрезков с концами в этих точках образуют многоугольник, правильно разбитый на N_2 многоугольников, то (рис. 6) $N_2 - N_1 + N_0 = 1$.

Несколько задач

Применения формулы Пика в основном связаны не с подсчетом площадей конкретных многоугольников, а с различными задачами и теоремами о ломаных на клетчатой бумаге.

30. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так обстоит дело, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

31. Пусть A и B — два узла клетчатой бумаги, из которых второй на p клеток правее и на q — выше первого (то есть расстояние между узлами равно $\sqrt{p^2 + q^2}$). Чему равно расстояние до прямой AB от ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

32. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

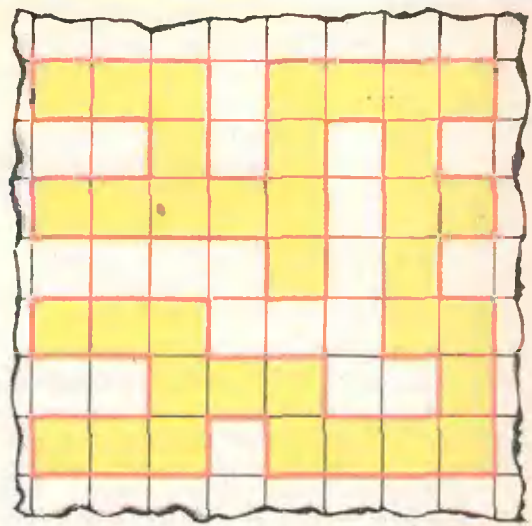


Рис. 8.

а) Какую наибольшую длину она может иметь?

б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1.)

Задача а) уже разбиралась в «Кванте» № 5 за этот год (с. 52) — она имеет номер М220 в «Задачнике «Кванта». Здесь мы приведем другое решение. Но начнем с задачи б). Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей; по условию все они лежат на границе многоугольника). Перейдем к задаче а). На рисунке 7 приведен пример пути короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может.

На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим, как на диагонали, квадрат 1×1 . Одна половинка этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но общая площадь, занятая такими половинками, не превышает $49 - 31 = 18$, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги. Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

Итак, ответы к задаче 32:

а) $28 + 36\sqrt{2}$; б) 31.

33. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать? (рис. 8).

Задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 февраля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М296, М297» или «... Ф308».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно называем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М296—М300; Ф308—Ф312

М296. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

А. Туранов

М297. На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами четырех квадратов $A_1B_1A_2C_1$, $A_2C_2A_3B_2$, $A_3B_3A_4C_3$ и $A_4C_4A_1B_4$ (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке). Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — конгруэнтные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на 90° (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них

в этом случае лежат на одной прямой).

Л. П. Куцков

М298. Запишем все несократимые дроби $\frac{p}{q}$, где $0 < p < q \leq m$, в порядке возрастания (m — данное натуральное число). Например, при $m = 5$ получится последовательность

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

Докажите, что для любых двух соседних дробей $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ в такой последовательности выполняется равенство $qr - ps = 1$.

М299. При каких n правильный n -угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)

Н. Б. Васильев

М300*. Алфавит состоит из трех букв: a , b , c . Назовем словом последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (из двух и более букв) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разную длину.

Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

А. М. Степин

Ф308. Фотометр представляет собой лист бумаги с жирным пятном. Этот лист устанавливают между двумя точечными источниками света. Сила света одного источника 20 св , силу света другого источника требуется определить. Для этого вначале подбирают расстояния l_1 и l_2 источников от листа так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть на нее со стороны первого источника. Оказалось, что $l_2 = 2l_1$. Затем подбирают расстояния l_1' и l_2' так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть со стороны второго источника. Оказалось, что $l_1' = l_2'$. Определить силу света второго источника.

Лист ставится перпендикулярно к линии, соединяющей источники.

Подсказка. Каждый участок бумаги можно охарактеризовать коэффициентом пропускания и коэффициентом отражения света.

Ф309. Змея заползла наполовину в неподвижную узкую трубу, лежащую на плоскости. Вторая половина змеи извивается произвольно по плоскости. Считая змею тонким однородным шнуром длины l , найти, в какой области может оказаться центр тяжести всей змеи.

В. Д. Горбунова

Ф310. Концы пружины закреплены. Как, не освобождая концов пружины, деформировать ее так, чтобы пружина после такой обработки

стремилась а) сократиться? б) удлиниться?

Ф311. Однородное магнитное поле меняется по абсолютной величине с постоянной скоростью k ($B=kt$). Имеется кусок меди, плотность которой d и удельное сопротивление ρ . Масса куска m . Из этого куска можно вытянуть однородную проволоку, из которой в свою очередь сделать замкнутый контур. Какой можно получить максимально возможный ток в этом контуре?

В. Д. Кержанцев

Ф312. Обруч радиуса R , катящийся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает абсолютно неупруго на ступеньку высоты h ($h < R$). Какую скорость будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку? При какой минимальной скорости обруч сможет «взобраться» на ступеньку?

Проскальзывания нет.

М. Геркс, Д. Сахаров, А. Цесис
(ученики Винницкой с. ш. № 17)

Решения задач

М256—М260; Ф269—Ф272

М256. Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго.

(Под расстоянием от точки M до стороны понимается расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона.)

Докажем сначала такую лемму. Если M, P и Q — три произвольные точки данной окружности, то расстояние $|MK|$ от точки M до прямой PQ равно среднему геометрическому расстояний $|ML|$ и $|MN|$ от M до касательных, проведенных в точках P и Q :

$$|MK|^2 = |ML| \cdot |MN|. \quad (1)$$

Представим себе, что точки P и Q зафиксированы, а M передвигается по окружности. При любом ее положении*) углы

*) Ниже мы считаем, что M не совпадает с P или Q (в вырожденном случае равенство (1) очевидно — обе его части равны 0).

$\angle MPL$ и $\angle MQK$ (не превосходящие, разумеется, 90°) равны по величине — каждый из них измеряется половиной дуги PM (не превосходящей полуокружности), поэтому прямоугольные треугольники MPL и MQK подобны и

$$\frac{|ML|}{|MK|} = \frac{|MP|}{|MQ|}. \quad (2)$$

(Это равенство, очевидно, сохраняется и в том случае, когда прямоугольные треугольники вырождаются в отрезки — в этот момент точка M диаметрально противоположна P .) Точно так же доказывается, что $\triangle MQN \sim \triangle MPK$:

$$\frac{|MN|}{|MK|} = \frac{|MQ|}{|MP|}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует (1).

Докажем теперь утверждение задачи. Для этого применим лемму к точке M окружности и к каждой стороне PQ вписанного многоугольника, а затем перемножим все равенства вида (1).

Недочеты в решениях, присланных читателями, были связаны в основном с тем, что при доказательстве леммы не учитывались все возможные случаи расположения точек P, Q и M на окружности (некоторые из них показаны на рис. 1, а, б, в). В нашем решении применяется рассуждение, которое охватывает сразу все случаи.

М257. При каких натуральных $n \geq 2$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

выполняется для любых действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , если а) $p = 1$; б) $p = \frac{1}{2}$; в) $p = \frac{6}{5^2}$?

Ответ. а) при всех n ; б) при $n \leq 3$; в) при $n \leq 4$.

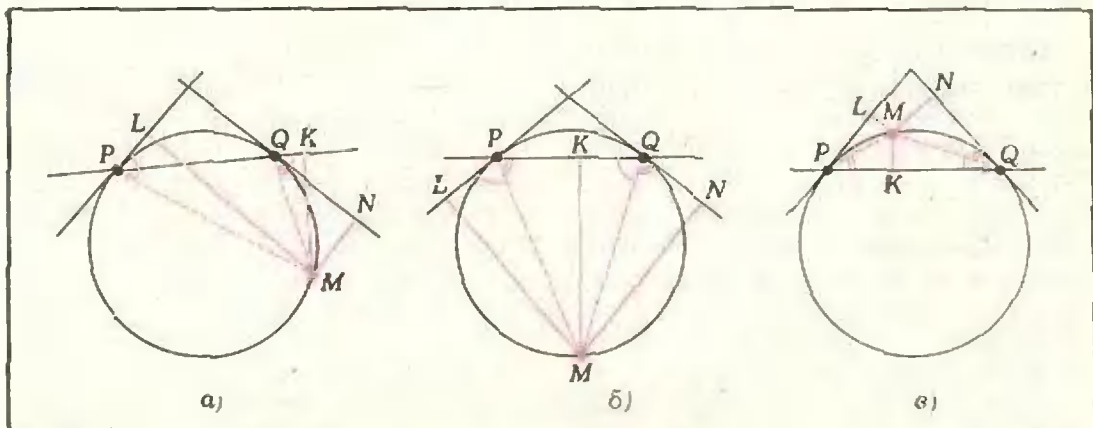


Рис. 1.

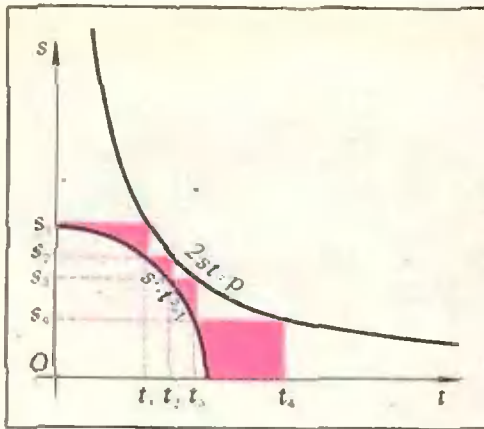


Рис. 2. Чем ближе p к единице, тем ближе расположена гипербола к окружности и тем больше ступеней имеет лестница.

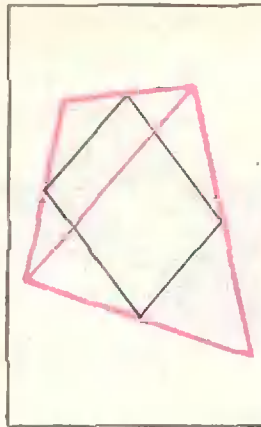


Рис. 3.

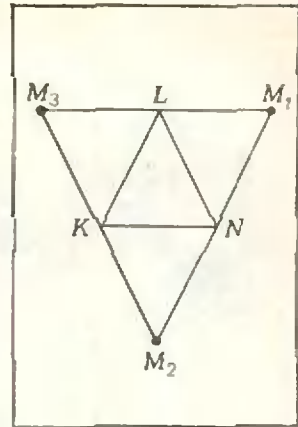


Рис. 4.

Заметим, что если положить в неравенстве $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 - px_1x_2 - \dots - px_{n-1}x_n \geq 0$ (*)

несколько последних переменных x_k, x_{k+1}, \dots, x_n равными нулю, то получится аналогичное неравенство, соответствующее меньшему n . Отсюда следует, что если (*) выполняется (для всех x_1, x_2, \dots, x_n) при некотором n , то оно выполняется и при меньших n . Таким образом, для каждого фиксированного p существует такое целое $N(p) \geq 2$, что (*) выполнено при $n < N(p)$ и не выполнено (для некоторых x_1, x_2, \dots, x_n) при $n \geq N(p)$; возможно также, что (*) выполнено при всех n (в этом случае можно считать, что $N(p) = \infty$).

Последний случай имеет место при $p = 1$. Действительно, в этом случае (*) эквивалентно очевидному неравенству

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 \geq 0.$$

Пусть $p = 1/2$. Тогда при $n = 3$ (*) эквивалентно неравенству

$$(3x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (2x_2 - 3x_3)^2 \geq 0,$$

а при $n = 4$ неравенство (*) нарушается, например, когда $x_1 = x_4 = 2, x_2 = x_3 = 3$ (при $n = 4$ неравенство (*) эквивалентно такому:

$$(3x_1 - 2x_2)^2 - x_2^2 + 6(x_2 - x_3)^2 - x_3^2 + (2x_3 - 3x_4)^2 \geq 0;$$

отсюда и возник наш пример).

Пусть $p = 1/3$. Тогда при $n = 4$ (*) эквивалентно неравенству

$$(5x_1 - 3x_2)^2 + x_2^2 + 15(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (3x_3 - 5x_4)^2 \geq 0,$$

а при $n = 5$ оно нарушается, например, когда $x_1 = x_5 = 9, x_2 = x_4 = 15, x_3 = 16$

(этот пример возникает естественным образом, если преобразовать (*) к виду

$$16(5x_1 - 3x_2)^2 + (16x_2 - 15x_3)^2 - 50x_3^2 + (15x_3 - 16x_4)^2 + 16(3x_4 - 5x_5)^2 \geq 0).$$

Обсудим теперь, как ответить на вопрос задачи при произвольном $p > 0$. Легко показать, что $N(p) = \infty$ при любом $p \in [0, 1]$ и $N(p)$ конечно при каждом $p > 1$, причем $N(p) = 2$ при $p > 2$. В принципе при каждом $p > 1$ можно найти $N(p)$, преобразовав левую часть (*) к сумме квадратов (причем заботиться о симметричности формул и о том, чтобы коэффициенты получались целыми или рациональными, вовсе не обязательно; выше мы сделали это для того, чтобы записать решение покороче). Например, можно привести (*) к виду

$$(s_1x_1 - t_1x_2)^2 + (s_2x_2 - t_2x_3)^2 + \dots + (s_{n-1}x_{n-1} - t_{n-1}x_n)^2 + r_nx_n^2,$$

последовательно полагая

$$t_k = p/2s_k, \quad s_{k+1} = \sqrt{1 - t_k^2}$$

($s_1 = 1, k = 1, 2, \dots$). Тогда $r_n = s_n^2 \geq 0$ при $n < N(p)$ и $r_n < 0$ при $n = N(p)$. Таким образом, $N(p) - 1$ (наибольшее n , при котором (*) еще выполняется) равно числу ступеней «лестницы», заключенной между графиками $s^2 + t^2 = 1, st = p/2$ и начинающейся в точке $s = 1, t = 0$, (рис. 2). Пусть p_k — значение p , при котором лестница симметрична относительно биссектрисы $s = t$ (заканчивается в точке $s = 0, t = 1$) и содержит k ступеней; ясно, что последовательность $p_1 = 2 > p_2 > p_3 > \dots$ стремится к 1 и $N(p) = k + 1$ при $p_{k-1} \geq p > p_k$. Нетрудно доказать, что $p_2 = \sqrt{2}$, но следующие p_k находятся уже из громоздких уравнений, сводящихся к алгебраическим уравнениям высокой степени.

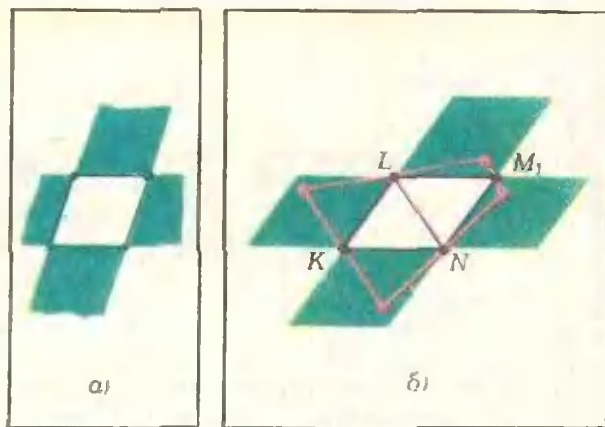


Рис. 5.

Решив задачу M257, мы оценили ρ_2 , ρ_3 и ρ_4 : поскольку $N\left(\frac{4}{3}\right) = 4$, $N\left(\frac{6}{5}\right) = 3$, то $\rho_2 > \frac{4}{3} > \rho_3 > \frac{6}{5} > \rho_4$.

Н. Б. Васильев

M258. На плоскости даны три точки K, L, N . Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках K, L, N . Найдите множество точек, в которые может попасть:

- а) середина четвертой стороны;
- б) вершина этого четырехугольника.

а) Заметим, что если в четырехугольнике соединить последовательно середины сторон, то образуется параллелограмм. Для доказательства этого широко известного факта достаточно провести одну из диагоналей данного четырехугольника (рис. 3): в образовавшихся треугольниках два отрезка, соединяющих середины сторон, являются средними линиями, а, следовательно, они параллельны проведенной диагонали и равны ее половине.

Из сделанного замечания следует, что середина четвертой стороны — точка M — является четвертой вершиной параллелограмма, тремя другими вершинами которого служат K, L и N . Легко видеть, что множество точек, в которые может попасть точка M , состоит из трех точек $\{M_1, M_2, M_3\}$ — вершин треугольника, средними линиями которого являются стороны треугольника KLN (рис. 4).

б) Рассмотрим один из параллелограммов, например, KLM_1N . Где могут находиться вершины выпуклого четырехугольника, если середины сторон находятся в точках K, L, M_1 и N ? Напомним, что многоугольник — выпуклый, если он лежит по одну сторону

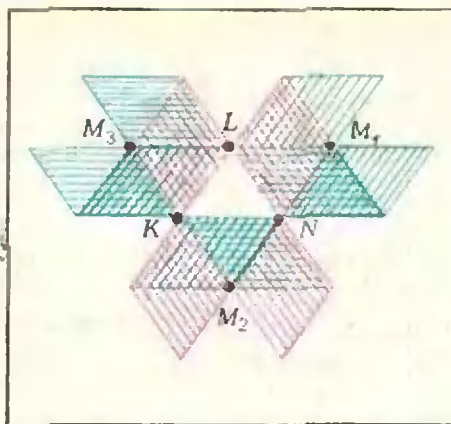


Рис. 6.

от каждой прямой, являющейся продолжением его стороны. Поэтому вершины четырехугольника могут лежать лишь в полуплоскостях между продолжениями противоположных сторон параллелограмма (рис. 5, а). Пользуясь тем, что две соседние вершины четырехугольника симметричны относительно вершины параллелограмма, находим множество точек, в которых могут оказаться вершины четырехугольника — оно состоит из четырех параллелограммов, получающихся из KLM_1N параллельным переносом и имеющим с ним общую сторону (рис. 5, б); нужно еще убедиться, что любая из точек этого «креста» может служить вершиной четырехугольника.

Если рассмотреть теперь еще две точки M_2 и M_3 , в которых может оказаться середина четвертой стороны многоугольника, и взять объединение трех «крестов», соответствующих M_1, M_2 и M_3 , то окончательно получится множество, выделенное штриховкой на рисунке 6; оно состоит из 15 треугольников, конгруэнтных $\triangle KLN$.

А. П. Савин

M259. Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке 7 нарисовано три квартета.)

Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить:

- а) в квадрате 5×5 ?
- б) в прямоугольнике $m \times n$ клеток?

а) В квадрате 5×5 можно расположить пять квартетов (см. рис. 8). Больше пяти квартетов в нем расположить нельзя, поскольку из $5 \times 5 = 25$ клеток по крайней мере пять клеток — по одной в каждой строке — в квартеты не войдут.

б) Если m и n — четные, то очевидно, что в прямоугольнике $m \times n$ можно разместить $mn/4$ квартетов.

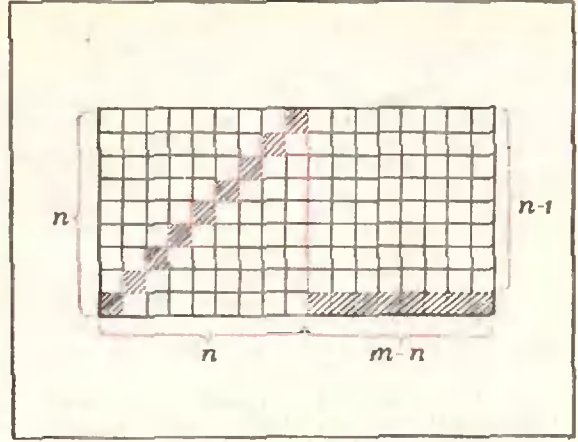
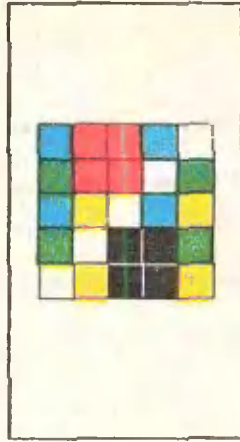
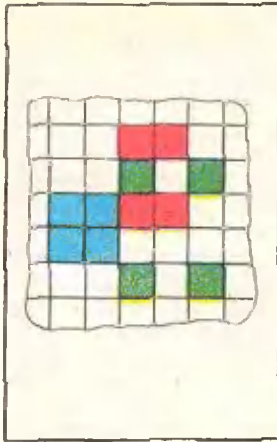


Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Если m четно, а n нечетно, то можно разместить $m(n-1)/4$ кварталов (аналогичная формула верна для нечетного m и четного n).

Если же и m и n — нечетные, то надо рассматривать два случая. (Будем считать, что $m \geq n$.)

1) $n = 4k + 1$. Ясно, что в этом случае можно покрыть квартетами не более $mn - (m-n) - n = m(n-1)$ клеток; на рисунке 9 показано, как это сделать: из квадрата $n \times n$ выкинута диагональ (напомним, что n — нечетное), и кварталы размещены аналогично тому, как это сделано на рисунке 8 в квадрате 5×5 ; из прямоугольника $(m-n) \times n$ ($m-n$ — уже четное) выкинута нижняя строка — тогда уже в прямоугольнике $k \times l = (m-n) \times (n-1)$ и k и l — четные, и как размещать кварталы — очевидно. Всего — снова $m(n-1)/4$ квартета.

2) $n = 4k + 3$. В этом случае $m(n-1)$ клеток покрыть квартетами не удастся, поскольку число $m(n-1)$ не делится на 4. Зато $m(n-1) - 2$ клетки покрыть уже можно — как именно, показано на рисунке 10 — выкинута $m+2$ заштрихованные клетки: $n-2$ — на диагонали квадрата $(n-2) \times (n-2)$, $(m-n+2)$ — в правой части нижней строки исходного прямоугольника, и две клетки — в левом верхнем углу (тогда $n-3$ делится на 4, $m-n+2$ и $n-1$ — оба четные).

А. А. Григорян

кающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом A_i , то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, то есть окраска «периодическая». Рассмотрим сначала случай, когда красок всего две; скажем, красная и черная.

Мы ограничимся тем, что приведем схему доказательства, оставив читателям детали промежуточных рассуждений.

Сначала условимся о терминологии и обозначениях. Большими латинскими буквами будем обозначать точки разбиения, малыми греческими — окрашенные дуги с концами в точках разбиения. Запись $\alpha = \beta$ будет оз-

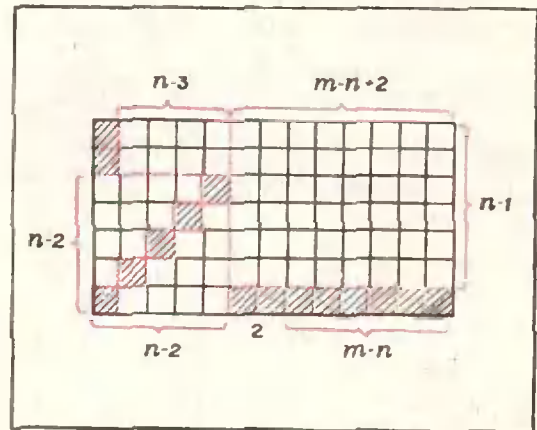


Рис. 10.

M260. Окружность разбита точками A_1, A_2, \dots, A_n на n равных частей, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги (с концами в точках разбиения) называются одинаково окрашенными, если при некотором повороте окружности одна из них полностью, включая цвет каждой части, совпадает с другой. (Например, на рисунке 11 дуги A_2A_8 и A_8A_{10} одинаково окрашены.)

Докажите, что если для каждой точки разбиения A_i можно указать две непересе-

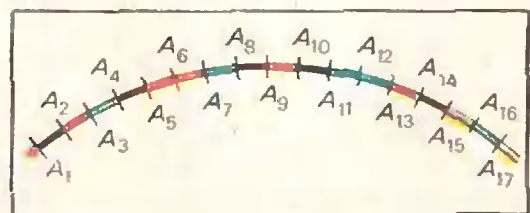


Рис. 11

начать, что дуги α и β одинаково окрашены. В дальнейшем одинаково окрашенные дуги будем называть *равными*. Через $|\alpha|$ обозначим длину дуги α . Направление обхода окружности по часовой стрелке примем за положительное (это позволит нам естественным образом различать начала и концы дуг). Через $\beta\gamma$ обозначим дугу, получающуюся, если к концу дуги β приклеить начало дуги γ (рис. 12).

Симметричной дугой назовем такую дугу, на которой лежат равные меньшие дуги в начале и конце, то есть α — симметричная дуга, если существуют дуги β , γ и δ такие, что $\alpha = \beta\gamma = \delta\beta$ (рис. 13).

По условию для каждой точки разбиения можно указать пару непересекающихся равных дуг с общим концом в этой точке. Вообще говоря, таких пар дуг для каждой точки может оказаться и несколько — попробуйте привести пример. Поэтому уточним, какую именно пару мы будем рассматривать: сопоставим каждой точке разбиения ту пару непересекающихся равных дуг (с общим концом), дуги которой имеют минимальную длину; в дальнейшем только такие пары и будем рассматривать.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если дуга α является минимальной дугой, то она несимметрична (докажите эту лемму самостоятельно).*

Пусть среди всех минимальных пар дуг, соответствующих различным точкам разбиения, пара, соответствующая точке A , имеет максимальную длину, и пусть отличные от A концы дуг этой пары — точки B и C (см. рис. 14, а) — не совпадают.

Центральным местом доказательства является

Основная лемма. *Если из окружности вырезать дугу BA и «склеить» точку A с точкой B , то новая окружность будет снова обладать тем свойством, что для любой точки разбиения можно указать пару непересекающихся равных дуг с общим концом в этой точке.*

С помощью этой леммы «периодичность» окраски доказывается индукцией по числу точек разбиения. Индукцию мы проведем позднее, а сейчас наметим доказательство основной леммы.

Обозначим дуги BA и AC буквой α . Рассмотрим часть новой окружности, получающейся из старой после вырезания дуги BA и «склеивания» точки A с точкой B (см. рис. 14, б); обозначим точки разбиения новой окружности буквами со штрихами.

Пусть M' — некоторая точка разбиения новой окружности, не лежащая на дуге $A'C'$, и пусть M — соответствующая ей точка старой окружности. Точке M отвечает минимальная пара равных (например, дуге v — см. рис. 14, а) дуг LM и MK . По условию леммы $|\alpha| \geq |v|$, следовательно, дуга MK целиком лежит на дуге MA .

Но дуга MA равна дуге $M'C'$; значит, дуга v лежит в начале дуги $M'C'$, то есть точка M' служит ее началом. Рассуждая аналогично, построим по дуге LM дугу на новой окружности, равную v , с концом в точке M' .

Однако могло бы получиться так, что построенные две дуги (одна — с началом в точке M' , другая — концом в этой точке) пересекаются (рис. 15). Покажем, что этого на самом деле быть не может.

Обозначим дуги $M'L'$, $L'K'$ и $K'M'$ (в направлении по часовой стрелке) через β , η и δ соответственно; тогда $v = \beta\eta = \eta\delta$, то есть v — симметричная дуга; но это противоречит лемме 1, и значит, дуги $L'M'$ и $M'K'$ — не пересекаются.

Тем самым для точек M' , не лежащих на дуге $A'C'$, все доказано.

Пусть теперь точка M' лежит на дуге $A'C'$, и пусть для определенности $|A'M'| \leq |M'C'|$ (см. рис. 16, б). Тогда на старой окружности точке M' соответствуют две точки — обозначим их через M и M_1 ; точка M лежит на дуге BA , точка M_1 — на дуге AC (рис. 16, а). Случай, когда дуга MK (минимальная дуга v с началом в точке M)

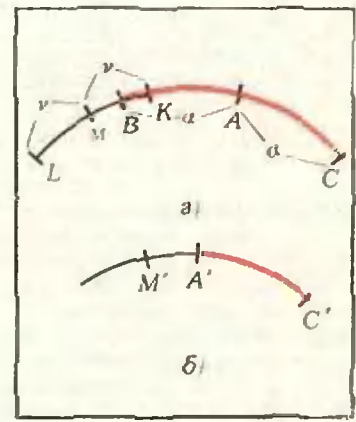
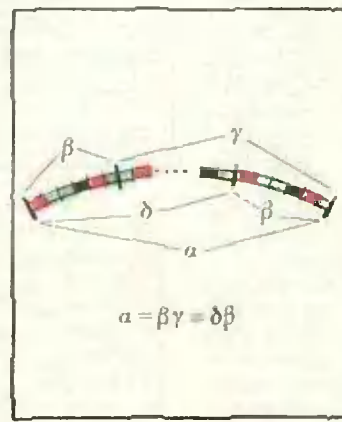
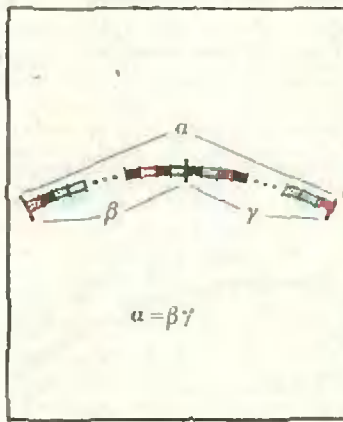


Рис. 12.

Рис. 13.

Рис. 14.

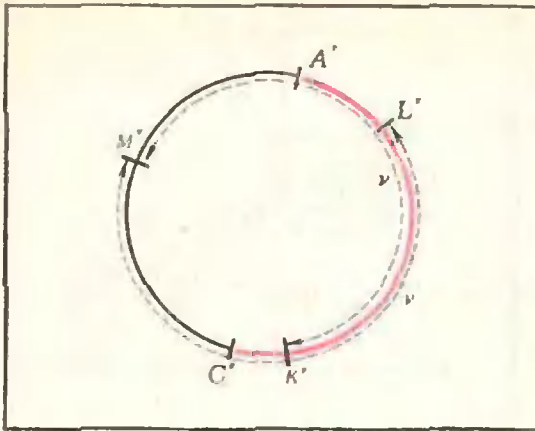


Рис. 15.

не пересекается с дугой AC , разбирается также, как и первый (когда точка M' не лежит на $A'C'$). На рисунке 16, а, изображен наиболее сложный случай, когда дуги MK и AC пересекаются. В этом случае (см. обозначения рисунка 16, а) выполняются следующие соотношения:

- 1) $\delta\alpha\alpha = \nu\nu\nu$;
- 2) $|\delta| < |\nu|$, $|\gamma| < |\alpha|$.

Лемма 2. Если выполнены соотношения 1) и 2) и если дуги ν и α несимметричны, то найдется дуга β такая, что $\alpha = \beta\gamma$, $\nu = \gamma\beta$.

Из этой леммы вытекает, что точка K совпадает с точкой M_1 и $\delta = \gamma$ (см. рис. 17, а.) Используя лемму 2 и то, что $|A'M'| \leq |M'C'|$, легко показать, что точке M_1 соответствует пара дуг, равных дуге $\nu = \gamma\beta$, откуда следует, что C — начало дуги, равной β (рис. 17, а); поэтому точке M' соответствует пара дуг, равных $\gamma\beta$ (рис. 17, б).

Этим доказательство Основной леммы заканчивается. Из него, в частности, вытекает, что длина максимальной пары дуг на новой окружности не превосходит длины

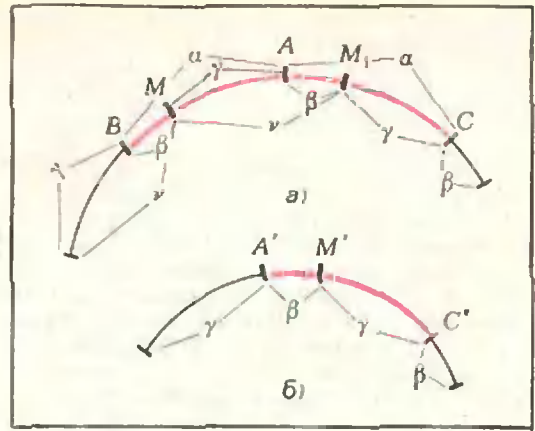


Рис. 17.

максимальной пары дуг на старой окружности.

Перейдем к доказательству периодичности окраски. Проведем индукцию по числу n точек разбиения. Для $n = 2$ это очевидно. Предположим, что мы доказали периодичность для $n \leq k$, и докажем его для $n = k + 1$. Пусть для определенности точке A соответствует максимальная по длине пара дуг. Если вся окружность является объединением этой пары дуг, то индукционное предположение верно. Если нет, то вырежем одну из этих дуг, а концы склеим. В силу Основной леммы новая окружность удовлетворяет условиям задачи, причем точек разбиения на ней меньше, чем на старой; поэтому по предположению индукции окраска новой окружности периодическая; причем длина периода не превосходит длины вырезанной дуги — обозначим ее через α .

Лемма 3. Если $|\alpha| \geq 0$, α — несимметричная дуга и $\alpha\alpha \dots \alpha\beta = \nu \dots \nu$, то $|\alpha| = |\nu|$.

Из этой леммы следует, что длина периода равна α , и значит, новая окружность имеет

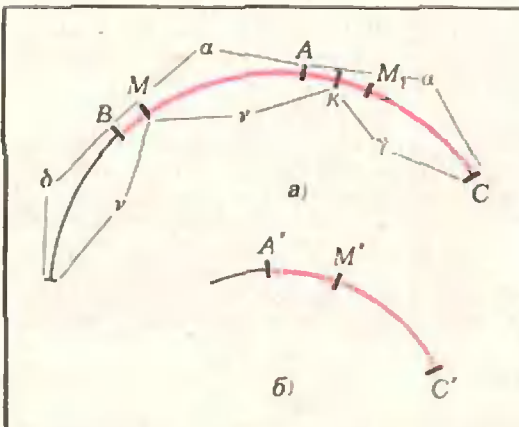


Рис. 16.

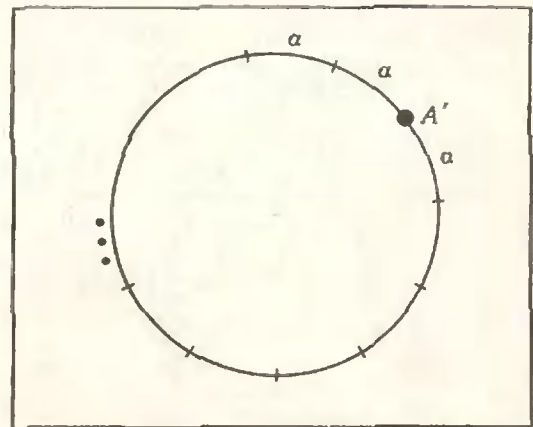


Рис. 18.

вид, изображенный на рисунке 18. Старая окружность получится, если мы разрежем новую в точке A' и вставим дугу α ; понятно, что эта операция периодичности окраски не нарушит. Доказательство закончено.

Г. А. Гуревич

Ф269. Математический маятник, который состоит из тяжелого металлического шара массы m и тонкой проводящей нити длины l , совершает малые колебания в горизонтальной однородном магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно к плоскости колебаний маятника. Максимальный угол, на который отклоняется маятник от вертикали, равен α_0 . Как изменится этот угол, если в тот момент, когда маятник проходит положение равновесия, к нему присоединить с помощью гибких тонких проводов конденсатор емкостью C (рис. 19), причем за время контакта, которое очень мало, конденсатор успеет полностью зарядиться.

Так как проводящая нить маятника движется в магнитном поле, на концах нити возникает некоторая разность потенциалов. Благодаря этому при подключении к маятнику конденсатора по цепи пойдет ток, и конденсатор зарядится. При этом часть энергии маятника W_M перейдет в энергию конденсатора W_K и часть выделится в виде тепла в проводах. Энергия колебаний маятника связана с максимальным углом отклонения маятника от вертикали. Поэтому сначала найдем новую энергию маятника W'_M , а затем и максимальный угол α_1 .

Из закона сохранения энергии следует, что

$$W_M = W'_M + W_K + Q.$$

Пусть напряжение на концах нити маятника при прохождении положения равновесия равно U . Так как время контакта с конденсатором очень мало, можно считать, что напряжение за это время не меняется. Тогда напряжение на конденсаторе после его за-

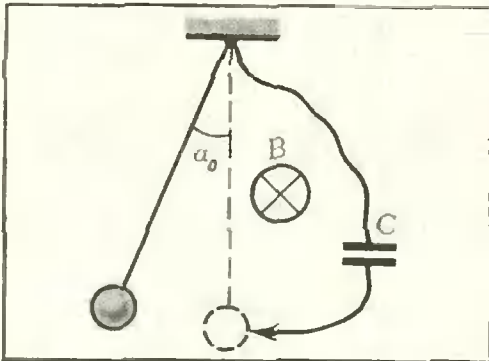


Рис. 19.

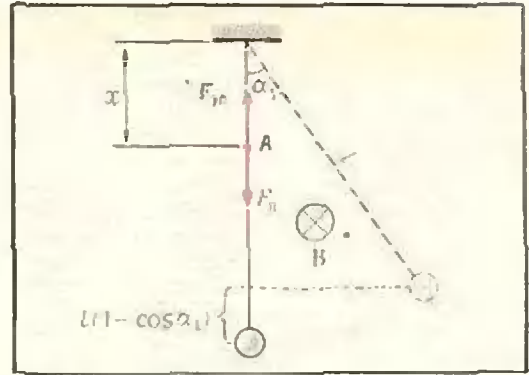


Рис. 20.

рядки равно U , а по цепи при зарядке конденсатора прошел заряд $q = CU$.

Очевидно, что сумма энергии конденсатора и количества тепла, выделившегося в проводах, равна работе «источника» с разностью потенциалов U при прохождении по цепи заряда q :

$$W_K + Q = Uq = CU^2.$$

Следовательно, энергия маятника после зарядки конденсатора будет равна

$$W'_M = W_M - CU^2.$$

Теперь свяжем энергию маятника с максимальным углом отклонения маятника от вертикали. Так как в тот момент, когда маятник максимально отклонен от вертикали, он обладает только потенциальной энергией и находится на высоте $h = l(1 - \cos \alpha)$ от самой нижней точки, которую естественно выбрать за нулевой уровень потенциальной энергии, то

$$W_M = mgl(1 - \cos \alpha_0)$$

и

$$W'_M = mgl(1 - \cos \alpha_1).$$

Поэтому

$$mgl(1 - \cos \alpha_1) = mgl(1 - \cos \alpha_0) - CU^2. \quad (1)$$

Для того чтобы найти α_1 , нам необходимо вычислить U . Сделаем это. На электроне, который находится в точке A на расстоянии x от точки подвеса маятника (рис. 20), действует сила Лоренца

$$F_L = evB = e\omega xB,$$

где v — линейная и ω — угловая скорость точки A при прохождении маятником положения равновесия. Под воздействием силы Лоренца свободные электроны будут смещаться вниз (мы считаем, что вектор индукции B магнитного поля направлен за чертой) до тех пор, пока возникшее электрическое поле не воспрепятствует этому. Таким образом,

$$F_L = F_{эл},$$

или

$$e\omega xB = eE,$$

откуда $E = \omega Bx$. То есть напряженность поля линейно зависит от x (рис. 21).

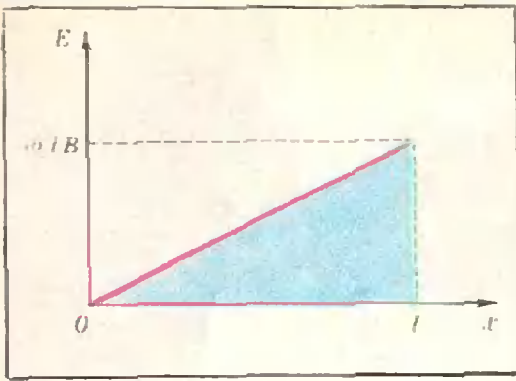


Рис. 21.

Как мы знаем, работа, совершенная силой, всегда численно равна площади фигуры под графиком зависимости силы от координаты. Разность потенциалов на концах нити — это работа по перенесению единичного положительного заряда вдоль нити, а E — сила, действующая на этот заряд. Поэтому, воспользовавшись графиком, приведенным на рисунке 21, найдем

$$U = \frac{1}{2} l \omega l B = \frac{1}{2} \omega l^2 B.$$

Поскольку $\omega = v/l$ и согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha_0),$$

то

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}$$

и

$$U = \frac{1}{2} l B \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}. \quad (2)$$

Подставив (2) в равенство (1), получим $mgl(1 - \cos \alpha_1) =$

$$= mgl(1 - \cos \alpha_0) - \frac{1}{2} Cl^2 B^2 g(1 - \cos \alpha_0).$$

Отсюда

$$1 - \cos \alpha_1 = (1 - \cos \alpha_0) \left(1 - \frac{Cl^2 B^2}{2m}\right). \quad (3)$$

Так как $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, а углы α_0 и α_1 малы, так что $\sin \alpha \approx \alpha$, то

$$1 - \cos \alpha_1 \approx \frac{\alpha_1^2}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \cos \alpha_0 \approx \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Поэтому равенство (3) перепишем в виде

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2 \left(1 - \frac{Cl^2 B^2}{2m}\right),$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{Cl^2 B^2}{2m}}.$$

Ф270. В длинной пробирке на расстоянии l_1 от западного конца имеется короткий столбик ртути (рис. 22). Масса ртути m . С какой угловой скоростью ω нужно вращать пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы ртуть достигла конца пробирки? Длина пробирки l , температура воздуха в пробирке не меняется. Атмосферное давление равно p_0 .

В неподвижной системе отсчета на столбик ртути в горизонтальном направлении действуют две силы: сила атмосферного давления $F_1 = p_0 S$ (S — площадь сечения пробирки) и сила давления воздуха в пробирке $F_2 = pS$ (см. рис. 22). Равность этих сил сообщает столбику ртути центростремительное ускорение, равное $a = \omega^2 l$ (так как ртуть находится на краю пробирки). Таким образом,

$$m\omega^2 l = p_0 S - pS.$$

Так как температура воздуха в пробирке не меняется, то по закону Бойля — Мариотта

$$p_0 S l_1 = p S l,$$

откуда

$$p = p_0 \frac{l_1}{l}.$$

Тогда

$$m\omega^2 l = p_0 S \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 S (l - l_1)}{ml^2}}.$$

Ф271. Подсчитать среднюю плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна $100 \text{ в} \cdot \text{м}^{-1}$, а на высоте $h = 1,5 \text{ км}$ эта напряженность падает до $25 \text{ в} \cdot \text{м}^{-1}$.

Как известно, напряженность электрического поля внутри заряженного тонкого сфе-

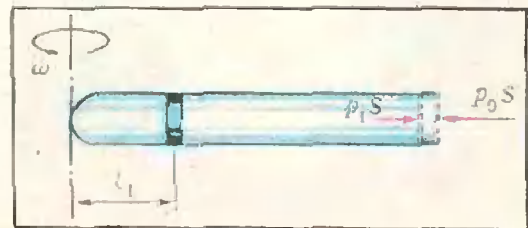


Рис. 22.

рического слоя равна нулю, а вне этого слоя напряженность такая, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в его центре. (Это можно показать, исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции.)

Разобьем Землю и атмосферу Земли на тонкие сферические слои. Тогда ясно, что на поверхности Земли напряженность электрического поля равна

$$E_0 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3^2}, \quad (1)$$

где Q_3 — суммарный заряд Земли, R_3 — радиус Земли.

На высоте h напряженность электрического поля складывается из напряженности поля, созданного зарядом Q_3 Земли, и из напряженности поля, созданного зарядом Q_n слоев атмосферы с радиусами, меньшими $R_3 + h$. То есть

$$E_h = \frac{Q_3 + Q_n}{4\pi\epsilon_0 (R_3 + h)^2}.$$

Так как

$$Q_n V_{\text{об}} =$$

$$= \left[\frac{4}{3} \pi (R_3 + h)^3 - \frac{4}{3} \pi R_3^3 \right] \rho,$$

то

$$E_h = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (R_3 + h)^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[R_3 + h - \frac{R_3^3}{(R_3 + h)^2} \right]. \quad (2)$$

Радиус Земли R_3 много больше высоты h , поэтому в знаменателе формулы (2) можно сумму $R_3 + h$ заменить на R_3 . Тогда

$$E_h = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho = E_0 + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{3\epsilon_0 (E_h - E_0)}{h} = \frac{3,8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot 75 \text{ в} \cdot \text{м}^{-1}}{1500 \text{ м}} \approx -1,3 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Ф272. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длины l (рис. 23). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол β от вертикального положения и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если

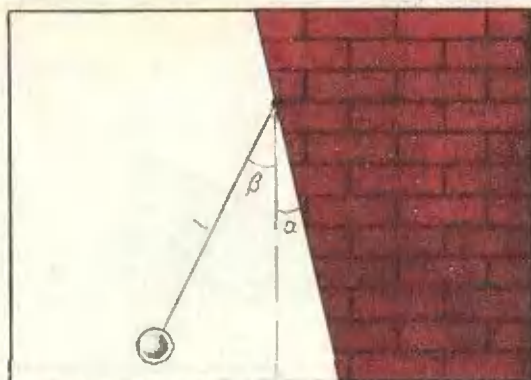


Рис. 23.

$\beta > \alpha$ и удар шарика о стенку абсолютно упругий.

Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой (максимальным углом отклонения от вертикали) β и с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При упругом столкновении со стенкой абсолютная величина скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это означает, что период колебаний маятника T в присутствии стенки не равен T_0 , а меньше этой величины на время τ . За это время τ маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы вправо от вертикали от угла α до угла β и вернулся обратно.

Занишем уравнение гармонических колебаний для углового перемещения φ :

$$\varphi = \beta \cos \omega t,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$. В момент времени $t = 0$ $\varphi = \beta$,

то есть маятник находится в крайнем правом положении. Через некоторое время t_1 угол отклонения маятника от вертикали станет равным α . Из уравнения колебаний

$$\alpha = \beta \cos \omega t_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Из симметрии очевидно, что

$$\tau = 2t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда окончательно

$$T = T_0 - \tau = T_0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right) = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

И. Ш. Слободецкий



ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

М.Л. КРАЙЗМАН

ШАР, КАСАЮЩИЙСЯ РЕБЕР МНОГОГРАННИКА

В последние годы на вступительных экзаменах в вузы часто предлагаются задачи, в которых фигурирует шар, касающийся всех ребер многогранника. Этой теме и посвящена настоящая статья.

Пусть шар касается всех ребер некоторого многогранника. Тогда справедливы следующие утверждения (докажите их самостоятельно):

(1) каждая грань многогранника пересекает поверхность шара по окружности, касающейся ребер многогранника, то есть по окружности, вписанной в грань; тем самым гранями многогранника будут такие многоугольники, в которые можно вписать окружность;

(2) основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на любую грань многогранника, является центром окружности, вписанной в эту грань;

(3) перпендикуляры, восстановленные к плоскостям граней в центрах вписанных окружностей, пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех ребер многогранника — в центре шара;

(4) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра шара на ребро многогранника, равен радиусу шара.

Теперь рассмотрим некоторые типы многогранников, для которых существует указанный шар.

Шар, касающийся ребер призмы

Теорема 1. Шар, касающийся всех ребер призмы, существует тогда и только тогда, когда эта призма правильная и все ее ребра равны между собой.

Доказательство. Пусть искомым шар существует. Сначала докажем, что тогда призма — прямая. Проведем через центр K шара, высоту OO_1 призмы: $KO \perp$ пл. ABC , $KO_1 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$ (рис. 1). По свойству (2) точки O и O_1 являются центрами окружностей, вписанных в равные основания призмы, следовательно, $O_1M_1 = OM$ ($OM \perp AB$, $O_1M_1 \perp A_1B_1$) как радиусы равных окружностей. Точки O , O_1 , M и M_1 лежат в одной плоскости (проходящей через прямую OO_1 и перпендикулярной к AB — докажите!), поэтому OO_1M_1M — прямоугольник и $M_1M \perp$ пл. ABC ($M_1M \parallel O_1O$). Далее, $\triangle O_1M_1B_1 = \triangle OMB$ (докажите!), поэтому $M_1B_1 = MB$, то есть MM_1B_1B — прямоугольник, $B_1B \parallel M_1M \perp$ пл. ABC .

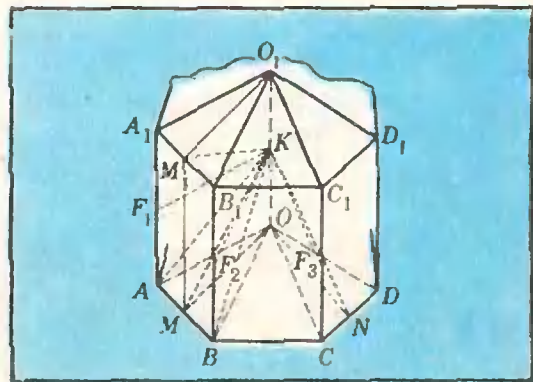


Рис. 1.

Таким образом, боковые грани призмы являются прямоугольниками. Но по свойству (1) в эти грани можно вписать окружность, а если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат; следовательно, боковые грани призмы — квадраты. Отсюда $AB = BB_1 = BC = \dots$, то есть в основании призмы лежит многоугольник с равными сторонами. Спроектируем призму с шаром на плоскость ABC ; призма спроектируется в многоугольник $ABC\dots$, а шар — в окружность, описанную вокруг этого многоугольника. Но многоугольник с равными сторонами, вписанный в окружность, — правильный, поэтому и призма — правильная.

Теперь докажем, что для правильной призмы с равными ребрами указанный шар существует. Для этого нужно показать, что существует точка, равноудаленная от всех ребер этой призмы. Такой точкой является середина K отрезка OO_1 , соединяющего центры оснований (рис. 1).

В самом деле, заметим, что отрезки KM , KM_1 , KN (и т. п.) равны, как гипотенузы прямоугольных треугольников, один катет которых равен KO , а другой — апофеме правильного многоугольника $ABC\dots$, и равны перпендикулярам, опущенным из точки K на боковые ребра призмы: $KF_1 = OA$, в $\triangle OAM$ имеем $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{1}{2} OO_1 = KO$.

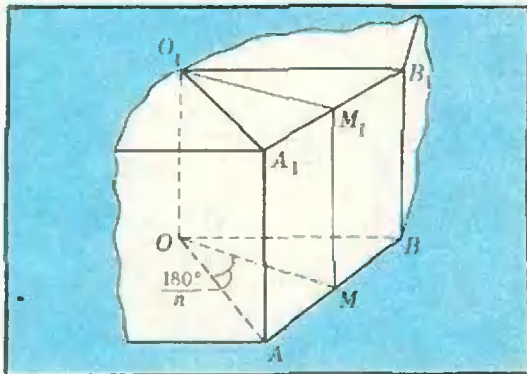


Рис. 2.

OM — апофема (аналогично рассматриваются остальные боковые ребра).

Таким образом, теорема доказана. Причем доказано даже, что радиус шара, касающегося ребер такой призмы, равен радиусу окружности, описанной вокруг основания призмы. На этом утверждении базируется решение задач на шар, касающийся ребер призмы.

Задача 1. В n -угольную призму вписаны два шара: один касается всех ее граней, а другой — всех ее ребер. Какая это призма?

По теореме 1, эта призма — правильная. Далее, с одной стороны, $MM_1 = OM + O_1M_1$ (рис. 2), поскольку в данную призму можно вписать шар; с другой стороны, $MM_1 = AB$, поскольку существует шар, касающийся всех ребер призмы. Отсюда $OM + O_1M_1 = AB$, $2OM = AB$. Но $OM = \frac{AB}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$, поэтому $\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = 1$, $n = 4$. Следовательно, призма представляет собой куб.

Шар, касающийся ребер пирамиды

Задача 2. Шар касается всех ребер тетраэдра. Доказать, что суммы противоположных ребер этого тетраэдра равны.

Пусть шар касается ребер тетраэдра $SABC$ (рис. 3) в точках M , N , K , F , P , E . Касательные, проведен-

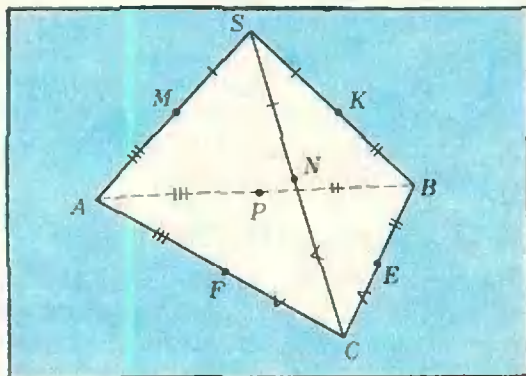


Рис. 3.

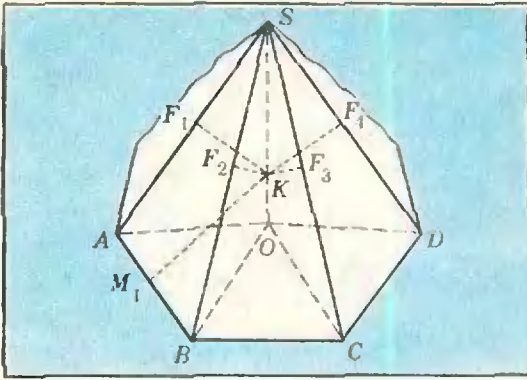


Рис. 4.

ные из одной точки к данному шару, равны, поэтому

$$SM = SN = SK, \quad (1)$$

$$AM = AP = AF, \quad (2)$$

$$BP = BK = BE, \quad (3)$$

$$CN = CF = CE. \quad (4)$$

В каждую из сумм $AS + BC$, $AC + BS$, $AB + CS$ входит ровно по одному отрезку из групп (1) — (4), следовательно, эти суммы равны.

Теорема 2. Если центр шара, касающегося всех ребер пирамиды, лежит на ее высоте, то такая пирамида — правильная.

Доказательство. Пусть центр K шара лежит на высоте SO (рис. 4). Прямоугольные треугольники SKF_1 , SKF_2 (и т. д.) имеют общую гипотенузу SK и равные катеты: $KF_1 = KF_2$ (радиусы шара), поэтому они равны. Отсюда $\angle F_1SK = \angle F_2SK$.

Прямоугольные треугольники ASO , BSO (и т. д.) имеют общий катет SO и равные острые углы при вершине S , поэтому они равны и $OA = OB (= OC = \dots)$. Следовательно, O — центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

По свойству (2) точка O является также центром окружности, вписанной в основание пирамиды. А если описанная вокруг многоугольника и вписанная в многоугольник окружности являются концентрическими, то этот многоугольник — правильный (докажите!). Следовательно, исход-

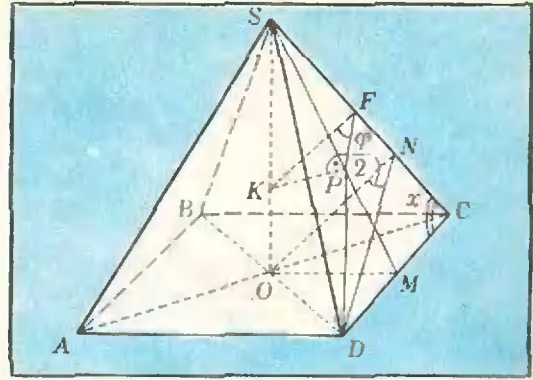


Рис. 5.

ная пирамида — правильная, теорема доказана.

При решении задач на шар, касающийся ребер правильной пирамиды, полезно использовать подобие прямоугольных треугольников KSF_1 и ASO ($\triangle ASK$ общий, $\triangle SKF_1 = \triangle SAO$).

Задача 3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , двугранный угол при боковом ребре равен φ . Определить радиус шара, касающегося всех ребер этой пирамиды.

Легко доказать, что искомый шар существует; обозначим его центр через K . Пусть $\angle SDC = \angle SCD = x$ (рис. 5). Проведем $KF \perp SC$ и $KP \perp \perp$ пл. SCD . Соединим точки F и P . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $FP \perp SC$, и поскольку пирамида правильная, $\angle KFP$ равен половине линейного угла двугранного угла при боковом ребре пирамиды, то есть $\frac{\varphi}{2}$. Заметим, что KF — радиус шара, касающегося ребер пирамиды, а P — центр окружности, вписанной в боковую грань SDC , поэтому PD — биссектриса $\angle SDC$, $\angle PDM = \frac{x}{2}$, $PM = PF$. Из $\triangle PDM$

и $\triangle KPF$ находим: $PM = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

$$KF = \frac{PF}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

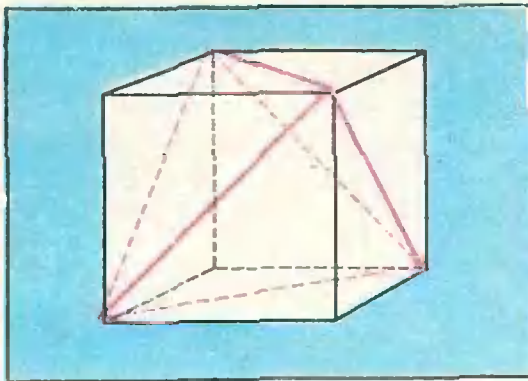


Рис. 6.

Теперь найдем связь между углами φ и x . Для этого рассмотрим прямоугольные треугольнички OND и DNC : $DN = \frac{OD}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, $DN = DC \sin x$.

Отсюда $OD = DC \cdot \sin x \sin \frac{\varphi}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$. Находя теперь $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (с

учетом неравенства $0 < x < \pi/2$), получаем ответ

$$KF = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \varphi + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

Задача 4 (НГУ). Найти объем части правильного тетраэдра с ребром длины a , заключенной между двумя сферами: одна сфера касается всех граней тетраэдра, другая — всех ребер.

Обозначим искомый объем через v , тогда $v = v_1 - 4v_2 - v_3$, где v_1 — объем шара радиуса R , касающегося всех ребер тетраэдра, v_2 — объем шарового сегмента, отсекаемого одной гранью тетраэдра от этого шара, v_3 — объем шара радиуса r , вписанного в тетраэдр.

Заметим, что если шар вписан в куб, то он касается всех ребер правильного тетраэдра, образованного диагоналями граней куба (рис. 6). Если диагональ грани куба равна a , то его ребро равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$, а радиус шара, вписанного в куб, равен половине этого ребра. $R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

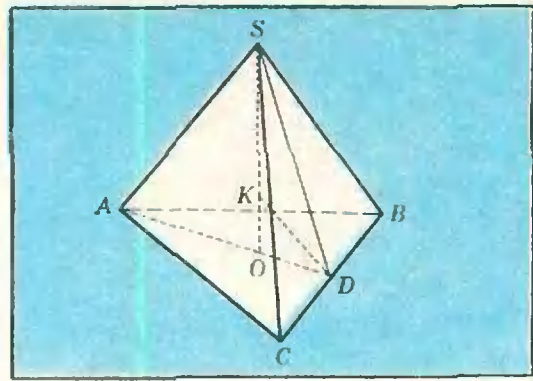


Рис. 7.

Теперь из $\triangle OKD$ (рис. 7) найдем радиус r шара, вписанного в тетраэдр: $OK = r = \sqrt{KD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, и высоту сегмента: $h = R - r = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{12}$.

Подставив найденные значения R , r и h в выражение

$$v = \frac{4}{3} \pi R^3 - 4\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) - \frac{4}{3} \pi r^3$$

и упрощая, получаем:

$$v = \frac{1}{216} \pi a^3 (7\sqrt{6} - 9\sqrt{2}).$$

Шар, касающийся ребер правильной усеченной пирамиды

Если шар касается всех ребер правильной усеченной пирамиды, то, как следует из утверждений (1) — (4) (см. с. 55), центр этого шара лежит на высоте пирамиды, соединяющей центры O, O_1 оснований, и шар касается ребер оснований пирамиды в их серединах M, M_1, \dots (рис. 8), причем OO_1M_1M — трапеция, $OO_1 \perp OM$, и перпендикуляр, опущенный из центра K шара на боковую грань, попадает в точку P — середину апофемы MM_1 . Это построение и теорема 2 (применяемая и к усеченной пирамиде) лежат в основе решения задач на шар, касающийся всех ребер усеченной пирамиды.

Задача 5. В правильную n -угольную усеченную пирамиду впи-

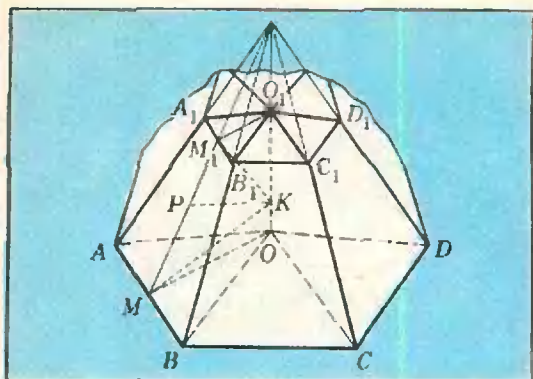


Рис. 8.

сам шар; известно также, что существует шар, касающийся всех ребер этой пирамиды. Найти n .

Рассматривая трапецию OO_1M_1M (см. рис. 8) и треугольники MOB и $M_1O_1B_1$, находим: $MM_1 = MO + M_1O_1$ (как отрезки двух касательных к шару, вписанному в пирамиду), $BB_1 = BM + B_1M_1$ (как отрезки двух касательных к шару, касающемуся ребер пирамиды), $MO = BM \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$; $M_1O_1 = B_1M_1 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. Но $MM_1 < BB_1$ (почему?), отсюда $\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} < 1$, $\frac{180^\circ}{n} > \frac{180^\circ}{4}$, $n < 4$. Следовательно, $n = 3$.

Задача 6. На каком расстоянии от боковой грани находится центр шара, касающегося всех ребер правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны оснований соответственно равны 4 см и 2 см?

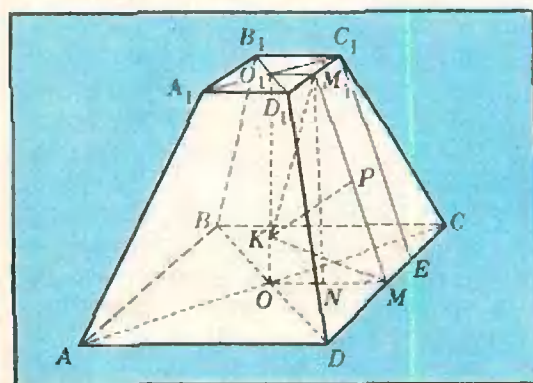


Рис. 9.

Рассмотрим трапецию OO_1M_1M (рис. 9), в ней $OM = 2$ (см), $O_1M_1 = 1$ (см), $KM = KM_1$ как радиусы шара, касающегося ребер усеченной пирамиды. Как и в предыдущей задаче, $CC_1 = CM + C_1M_1 = \frac{CD + C_1D_1}{2} = 3$ (см). Теперь находим высоту трапеции CC_1D_1D : $M_1M = C_1E = \sqrt{CC_1^2 - (CM - C_1M_1)^2} = \sqrt{8}$ (см), и высоту трапеции OO_1M_1M : $OO_1 = M_1N = \sqrt{M_1M^2 - (MO - M_1O_1)^2} = \sqrt{7}$ (см).

Обозначим OK через x , тогда $O_1K = \sqrt{7} - x$, $KM_1 = \sqrt{O_1K^2 + O_1M_1^2} = \sqrt{(\sqrt{7} - x)^2 + 1}$, $KM = \sqrt{x^2 + 2}$. Но $KM_1 = KM$, получается уравнение относительно x , решая его, находим: $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Осталось найти $KM = \sqrt{\frac{4}{7} + 4} = \sqrt{\frac{32}{7}}$ и $KP = \sqrt{KM^2 - PM^2} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$ (см).

Упражнения

- (НГУ). Шар касается всех ребер куба. Найти площадь поверхности шара, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1 см.
- (НГУ). Шар касается всех ребер куба. Найти объем общей части шара и куба, если ребро куба имеет длину a .
- В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Где находится центр шара, касающегося всех ребер?
- (НГУ). Шар радиуса R касается каждого ребра правильного тетраэдра. Найти объем их общей части.
- (МГУ, мехмат, 1966). Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.
- (МФТИ, 1963). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро пирамиды равно b . Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.
- Боковое ребро правильной n -угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α . На каком расстоянии от плоскости основания находится центр шара, касающегося всех ребер пирамиды, если сторона ее основания равна a ?

Международные олимпиады школьников



XVI Международная математическая олимпиада

В. А. Скворцов, З. И. Моисеева

Начиная с 1959 года регулярно проводятся международные олимпиады школьников по математике (ММО). Эти олимпиады довольно быстро завоевали большой международный авторитет.

Если в I олимпиаде принимали участие команды 7 стран (Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии), то в XVI олимпиаде участвовали уже команды 18 стран (Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, ДРВ, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции и Югославии).

Начиная с XI ММО наш журнал регулярно помещает подробную информацию о ходе олимпиад и разбор предлагавшихся на них задач.

С каждым годом растет число стран, участвующих в Международной математической олимпиаде школьников. В XVI олимпиаде, проходившей в июле 1974 года в городе Эрфурте (ГДР), участвовало уже 18 стран. К участникам прошлых олимпиад в этом году присоединились довольно сильные команды Демократической Республики Вьетнам и Соединенных Штатов Америки, что сделало борьбу за призовые места еще более острой и интересной.

Как и в прошлые годы, команда каждой страны состояла из 8 учащихся, исключение в этом году составляли команды Кубы (из 7 человек) и ДРВ (из 5 человек).

Советский Союз на XVI олимпиаде представляли:

Ананьевский Игорь, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ; он получил на Ленинградской городской олимпиаде в 1972 году III премию, в 1973 году —

II премию, а на Всесоюзной математической олимпиаде в 1973 году — II премию и в 1974 году — I премию;

Брайлов Андрей, выпускник школы № 2 г. Москвы, получал премии на Московских городских олимпиадах в 1971—1974 годах, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972, 1973 и 1974 годах получил соответственно I, III и II премии;

Григорян Александр, выпускник школы № 211 г. Баку, получил на республиканской олимпиаде в 1972 и в 1973 годах I премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1974 году — II премию;

Гусаров Михаил, выпускник школы № 30 г. Ленинграда, получал на Ленинградской городской олимпиаде в 1970—1974 годах I премии, а на Всесоюзной олимпиаде в 1971 году — II премию, в 1972 и 1973 годах — I премию и в 1974 году — II премию;



Команда СССР на XVI Международной математической олимпиаде. Слева направо: А. Григорян, Д. Тюкавкин, А. Браилов, М. Гусаров, З. Н. Моисеева (зам. руководи-

теля команды), С. Фомиц, В. А. Скворцов (руководитель команды), И. Анянцевский, Н. Чернов, И. Свицкий. (Фото И. Лемана, ГДР)

Свицкий Игорь, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ, получал на Ленинградской городской олимпиаде в 1972—1974 годах II премии, на Всесоюзной олимпиаде в 1972 году — II премию, в 1973 году — III премию и в 1974 году — I премию;

Тюкавкин Дмитрий, выпускник школы № 11 г. Иркутска, получил на областной олимпиаде в 1972 и 1973 годах I премию, в 1974 году — II премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972 и 1973 годах — II премию, в 1974 году — I премию;

Фомиц Сергей, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ, получил на Ленинградской городской олимпиаде в 1970 году I премию, в 1971 году — III премию, в 1972 году — II премию, в 1973 и 1974 годах I премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972 году — I премию, в 1973 и 1974 годах — II премию;

Чернов Николай, выпускник школы № 95 г. Кривого

Рога УССР, получил на республиканской олимпиаде в 1972 году III премию, в 1973 и 1974 годах — I премию и на Всесоюзной олимпиаде в 1973 году — III премию, а в 1974 году — I премию.

Участникам олимпиады в каждый из двух дней соревнований было предложено за 4 часа решить по 3 задачи. Эти задачи были отобраны международным жюри из числа задач, предварительно предложенных странами-участницами.

Задачи первого дня соревнований

1. Имеется три карточки, на каждой из которых написано одно из целых чисел. Эти числа p, q, r удовлетворяют условию $0 < p < q < r$.

Три игрока А, В и С играют в игру, один круг которой состоит в следующем: карточки перемешиваются и раздаются игрокам по одной; затем каждый игрок получает количество шариков, равное числу, написанному на полученной им карточке; потом карточки собираются, а шарик остается у игрока. Игра продолжается N кругов, $N \geq 2$. В конце игры у игрока А накопилось 20 шариков,

у B — 10 шариков, у C — 9 шариков. Известно, что в последнем круге игрок B получил r шариков. Требуется установить, кто из игроков получил q шариков в первом круге (США; за полное решение этой задачи давалось 5 очков).

2. В треугольнике ABC величины углов при вершинах A , B и C равны соответственно α , β и γ . Доказать, что неравенство

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы на отрезке AB нашлась точка D такая, что величина CD является средним геометрическим величин AD и BD (Финляндия; 6 очков).

3. Доказать, что для любого натурального числа n число

$$\sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$$

не делится на 5 (Румыния; 8 очков).

Задачи второго дня соревнований

4. Рассмотрим разбиения шахматной доски 8×8 на p взаимно непересекающихся прямоугольников, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждый прямоугольник состоит из некоторого числа клеток и содержит белых клеток столько же, сколько и черных;

2) если a_i — число белых клеток в i -м прямоугольнике, то $a_1 < a_2 < \dots < a_p$.

Найти наибольшее значение p , при котором такое разбиение возможно, и определить для этого значения p все последовательности a_1, a_2, \dots, a_p , для которых можно реализовать такое разбиение (Болгария; 6 очков).

5. Найти множество значений суммы

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

где a, b, c, d — произвольные положительные действительные числа (Нидерланды; 7 очков).

6. Пусть P — многочлен с целочисленными коэффициентами, не являющийся константой, и пусть $n(P)$ — число всех различных целых чисел k , для которых $[P(k)]^2 = 1$. Доказать, что

$$n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

где $\deg(P)$ означает степень многочлена P (Швеция; 8 очков).

Подведя итоги олимпиады, международное жюри, образованное руководителями команд-участниц, присудило призы победителям.

Диплом I степени

получили 10 из 140 участников олимпиады: *Александр Григорян* (СССР), *Жан-Кристоф Экюз* (Франция), *Янош Коллар* (Венгрия), *Андриан Окняну* (Румыния), *Герберт Симмель* (Австрия), *Микаэль Стайнер* (Швеция), набравшие по 40 очков; *Йозеф Б. Варга* (Югославия) и *Дмитрий Тюкавкин* (СССР), набравшие по 39 очков; *Миодраг Живкович* (Югославия) и *Хоанг Ле Минь* (ДРВ), набравшие по 38 очков.

Диплом II степени

был присужден 24 участникам, набравшим от 37 до 30 очков. Среди них члены советской команды *Сергей Фомин* (36 очков), *Андрей Браилов* (34 очка) и *Михаил Гусаров* (32 очка).

Диплом III степени

присуждался участникам, набравшим от 29 до 23 очков. Его получили 37 человек, в том числе члены советской команды *Игорь Сивицкий* (29 очков) и *Николай Чернов* (27 очков).

В целом команда Советского Союза выступила весьма успешно, набрав наибольшее число очков — 256. Далее следуют команды США (243), Венгрии (237), ГДР (236), Югославии (216), Австрии (212), Румынии (199), Франции (194), Великобритании (188), Швеции (187), Болгарии (171), Чехословакии (158), ДРВ (146 при 5 участниках), Польши (138), Нидерландов (112), Финляндии (111), Кубы (65 при 7 участниках), Монголии (60).

Поправка

В «Кванте» № 9 за 1974 год на с. 62 формула (2) должна выглядеть так:

$$T_{n+1}(x) - x T_n(x) - \frac{1}{4} T_{n-1}(x);$$

$$T_2(x) - x^2 - \frac{1}{2}.$$

VII Международная физическая олимпиада

Г. С. Тарасюк

В июле 1974 года в Варшаве состоялась VII Международная олимпиада по физике среди школьников. В олимпиаде участвовали команды Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Чехословакии, ФРГ. Команда ФРГ участвовала в олимпиаде впервые.

В состав команды СССР вошли призеры Всесоюзной олимпиады по физике, показавшие наилучшие результаты на тренировочном сборе. Это:

Курчанов Анатолий — ученик 10 класса средней школы № 21 г. Житомира, УССР;

Масич Сергей — ученик 10 класса физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска;

Наний Олег — ученик 10 класса средней школы № 37 г. Кишинева, МолдССР;

Руднев Алексей — ученик 10 класса средней школы № 762 г. Москвы;

Фалькин Евгений — ученик 10 класса физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска.

9 июля проводился теоретический тур, на котором участникам нужно было решить 3 задачи. Максимальное число баллов в I туре получили: Ежи Тарасюк, Ярослав Деминет (Польша) и Геза Мешена (Венгрия). 11 июля на экспериментальном туре всем участникам была предложена одна задача. Лучшее решение эксперимен-

тальную задачу выполнил Ежи Тарасюк, получивший максимально возможное число баллов. Среди участников Советской команды в теоретическом туре лучший результат у Анатолия Курчанова, а в экспериментальном — у Евгения Фалькина.

13 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были подведены итоги. Из 40 участников олимпиады 18 оказались в числе победителей. Наша команда была единственной на олимпиаде, все члены которой были награждены дипломами и ценными подарками.

I премию получили: *Ежи Тарасюк, Ярослав Деминет* (Польша), *Геза Мешена* (Венгрия).

II премий на олимпиаде не было.

III премию получили: *Анатолий Курчанов, Алексей Руднев* (СССР), *Зденек Свобода, Юрий Грушка* (Чехословакия), *Георгий Палфалви, Владар Кароли* (Венгрия), *Йорг Бергман, Феликс Керстан* (ГДР).

Похвальные дипломы получили: *Сергей Масич, Олег Наний, Евгений Фалькин* (СССР), *Мария Цицейка, Михай Ганцю-Петцю* (Румыния), *Ульф Брюстель, Ханс-Георг Мартин* (ГДР).

Для участников олимпиады были организованы различные экскурсии. Знакомство с историческими и культурными памятниками Польши началось с посещения Музея солнечных часов в Енджеюве, затем была интересная прогулка на плотках по живописной реке Дунаец, осмотр соляных копей в Величке. В Кракове учащиеся из СССР посетили музей В. И. Ленина, были на экскурсии в Королевском замке Вавель, в Институте ядерных исследований. 18 июля все участники олимпиады посетили бывший концлагерь в Освенциме. Члены команды СССР возложили цветы на братские могилы

советских воинов в Варшаве, в Кракове, у стены смерти в Освенциме. На олимпиаде среди участников установились хорошие дружеские отношения.

Ниже приводятся задачи теоретического и экспериментального ту-ров.

Задача 1 (механика, атомная физика)

С неподвижным атомом водорода, находящимся в основном энергетическом состоянии, сталкивается такой же атом водорода, движущийся со скоростью v . Пользуясь моделью Бора и зная, что энергия ионизации атома водорода составляет E_H , а масса атома равна m_H , определить предельную скорость v_0 , ниже которой столкновения атомов являются упругими.

После достижения скорости v_0 столкновения между атомами могут стать неупругими, что вызывает излучение. Определить процентное отношение разности частот излучений, наблюдаемых в направлении, совпадающем с начальной скоростью налетающего атома, и в противоположном направлении, к среднему арифметическому этих частот.

$$E_H = 13,6 \text{ эв} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

$$m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Задача 2 (оптика)

На плоскопараллельную пластинку (см. рисунок) в точке A (с координатой $x = 0$) перпендикулярно к пластинке падает узкий пучок света. Коэффициент преломления пластинки меняется по формуле

$$n_x = \frac{n_A}{1 - \frac{x}{R}},$$

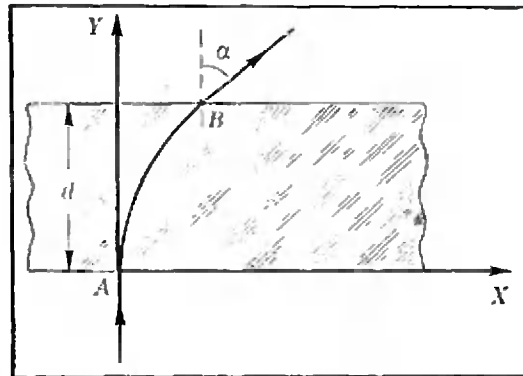
где n_A и R — постоянные величины.

Пучок покидает пластинку в точке B под углом α к начальному направлению. 1) Определить коэффициент преломления n_B в точке B , в которой пучок покидает пластинку. 2) Определить координату x_B точки B . 3) Определить толщину пластинки d .

$$n_A = 1,2; \quad R = 13 \text{ см}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Задача 3 (термодинамика)

Научная экспедиция, находящаяся на необитаемом острове, исчерпала все свои источники энергии. На этом острове нет никаких ветров, не текут ручьи, небо покрыто толстым слоем туч, атмосферное давление постоянное, а температура атмосферы и воды в омывающем остров необыкновенно спокойном океане днем и ночью одинакова. Однако, на острове был обнаружен источник химически нейтрального газа, выделяющегося с постоянной скоростью из одной пещеры. Газ выделялся под атмосферным давлением и с температурой окружающей среды. Члены экспедиции располагают двумя полупроницаемыми пленками, из которых одна



свободно пропускает обнаруженный газ, являясь одновременно полностью непроницаемой для воздуха, вторая пленка, наоборот, пропускает воздух, но не пропускает газ. Кроме того, экспедиция имеет возможность сконструировать простые механические устройства, например, в виде цилиндров с поршнем и клапанами; и члены экспедиции решили построить двигатель.

Доказать, что можно построить такой идеальный двигатель, работающий на этом газе, что теоретически не будет ограничения по мощности.

Экспериментальная задача

В закрытой коробке находятся два одинаковых идеальных полупроводниковых диода и резистор, соединенные в неизвестную электрическую цепь. Определить сопротивление резистора, имея в своем распоряжении следующий набор приборов и принадлежностей: два универсальных измерителя тока и напряжения, батарею аккумуляторов, реостат, электропровода, миллиметровую бумагу.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В примере $KIC + KCI = ISC$ каждой букве соответствует своя цифра. Определите, чему равен «иск».

2. Если внимательно следить за уровнем жидкости в банке с консервированными томатами, то можно заметить, что при открывании банки уровень жидкости понижается. Как это объяснить?

3. Из 36 спичек построили треугольники, квадраты и домики (как на рисунке) — всего 10 фигур. Найдите число фигур каждого вида.

4. В сосуд налито две жидкости — вода и машинное масло. В нижнюю жидкость с помощью веревочки погружают кубик. Как определить величину выталкивающей силы, действующей на кубик?

5. В одном из рассказов Джека Лондона есть такие строки:

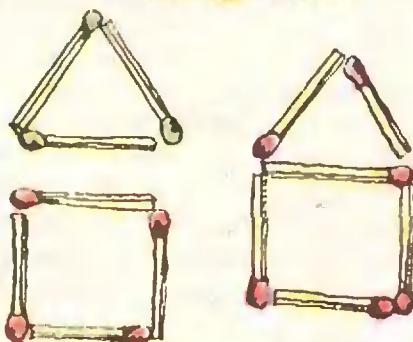
«Честное слово, в такой холод нельзя разрезать, — сказал Джон Месснер. — Если сейчас не все 80 ниже нуля, то уж 79 верных». (Температура указана по Фаренгейту.)

Известный полярный путешественник В. Стефанссон в книге «Гостеприимная Арктика» пишет:

«Если при 45° ниже нуля снять перчатку и держать руку перед глазами, то можно видеть, что с каждого пальца поднимается струйка пара...» (Здесь температура указана по Цельсию).

Какая из упомянутых температур действительно ниже, если известно, что в термометре Фаренгейта за 0° ($0^\circ F$) принята температура смеси снега и нашатыря, равная приблизительно $-18^\circ C$, а температура кипения воды равна $212^\circ F$.

KIC + KCI = ISC



Рисунки Э. Назарови

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ж. ЛОЗЕ

Числовые последовательности встречаются очень часто. Вспомните, например, ряды чисел, которые второклассники твердили при повторении таблицы умножения на 2:

$$П_1 = (2, 4, 6, 8, 10, \dots);$$

на 5:

$$П_2 = (5, 10, 15, 20, 25, \dots);$$

на 6:

$$П_3 = (6, 12, 18, 24, 30, \dots)$$

и многие другие.

Вспомните надписи на объективе фотоаппарата; и там вы найдете последовательность чисел, а именно:

$$П_4 = (2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22).$$

Вот еще несколько примеров числовых последовательностей:

$$П_5 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right);$$

$$П_6 = (1, 4, 9, 16, 25, \dots);$$

$$П_7 = (7, 4, 1, -2, -5, -8);$$

$$П_8 = (-2, +4, -8, +16, -32, +64, -128, +256, -512, \dots).$$

Отдельные числа, входящие в числовую последовательность, называются *членами последовательности*. Если последовательность состоит из конечного числа членов, то ее называют *конечной*, в противном случае — *бесконечной* **).

Ряд чисел, появляющийся в школьной таблице умножения на 2 (иначе, в *последовательности четных чисел*), рассматривается в начальных классах лишь до 20, а именно:

$$П_9 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20).$$

Здесь число 20 — последний из десяти членов последовательности. Если последовательность продолжить неограниченно, то есть так, чтобы она не имела последнего (конечного) члена, то получится *бесконечная последовательность чисел*.

$$П_{10} = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots).$$

Здесь многоточие означает, что последовательность бесконечна — не имеет «конца» (последнего члена).

Задание последовательности указанием нескольких первых членов таит в себе возможность ошибки. Предполагается, например, что последовательность $П_5$ следует продолжить так:

$$П_5 = \left(\dots, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots\right),$$

но этого никто и ничто не гарантирует. После члена $\frac{1}{3}$ могут, например, идти члены

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{1}, \dots$$

*) Dozent Dr. H. Lohse «Elementare Zahlenfolgen», «Альфа» (ГДР), 1968, №№ 3—6. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

***) В нашей литературе *числовой последовательностью* обычно называют бесконечную последовательность. (Прим. перев.)

или, скажем, $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$;

можно продолжить последовательность Π_5 и другими способами. Мы видим, что *бесконечную последовательность нельзя однозначно задать конечным числом первых членов*. Значит, нужно искать лучшие способы задания числовой последовательности.

Особенно простой является последовательность

$$\Pi_{11} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

называемая *последовательностью натуральных чисел*, в ней каждый последующий член на 1 больше предыдущего.

Этой последовательности можно сопоставить любую другую бесконечную последовательность — каждому члену последовательности поставить в соответствие его порядковый номер: первому члену — число 1, второму члену — число 2, ... k -му члену, который часто называют *общим членом*, — число k . Сами же эти члены обычно обозначают так:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots).$$

Так, например, в последовательности Π_1 второй член $a_2 = 4$; третий член $a_3 = 6$, k -й член $a_k = 2k$. Таким образом, числовая последовательность представляет собой множество упорядоченных пар чисел $[k, a_k]$, в которых первое число (номер) — натуральное, а второе (сам член) — действительное. Кроме того, существует *однозначное* отображение множества $\{k\}$ на множество $\{a_k\}$, то есть каждому числу k соответствует *ровно одно* число a_k .

Но однозначное отображение есть не что иное, как *функция*. Поэтому *числовые последовательности — это особый класс функций*. Областью определения таких функций является множество $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, k, \dots\}$ натуральных чисел для бесконечных последовательностей и мнс-

жество $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ — для конечных (здесь n — номер последнего члена конечной последовательности). Например, последовательность Π_7 состоит из шести членов, для нее $n = 6$.

Теперь нам нетрудно дать четкое определение понятия «числовая последовательность».

Числовые последовательности — это функции, областью определения которых является множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$ или подмножество первых его n элементов $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, а областью изменения — множество действительных чисел.

Выражение k -го члена через его номер k : $a_k = f(k)$ позволяет задать всю последовательность.

Такой способ задания последовательности называется *аналитическим*.

В качестве примера заметим, что общий член последовательности $\Pi_6 = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ имеет вид $a_k = k^2$.

Аналитический способ задания последовательности очень похож на аналитический способ задания функции — лишь при записи функции независимую переменную обычно обозначают через x , а зависимую — через y . Скажем, формула $y = 2x$ — это аналитическая запись линейной функции. Если областью ее определения считать множество всех действительных чисел, то графиком функции $y = 2x$ будет прямая (рис. 1). Равенство же $a_k = 2k$ является аналитическим заданием последовательности четных чисел (независимая переменная k принимает лишь натуральные значения).

Графическим изображением последовательности $a_k = 2k$ будет не вся прямая, а лишь отдельные ее точки (рис. 2). Математик сказал бы о них: дискретная последовательность точек. Такие точки для любой последовательности могут располагаться лишь в I и IV квадрантах

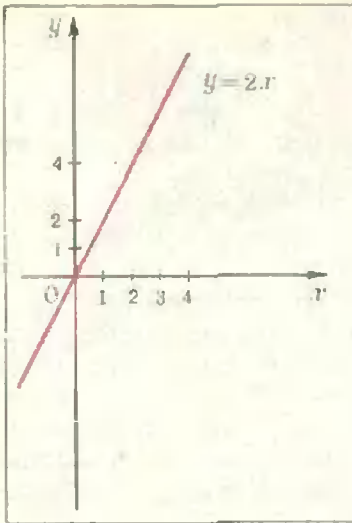


Рис. 1.

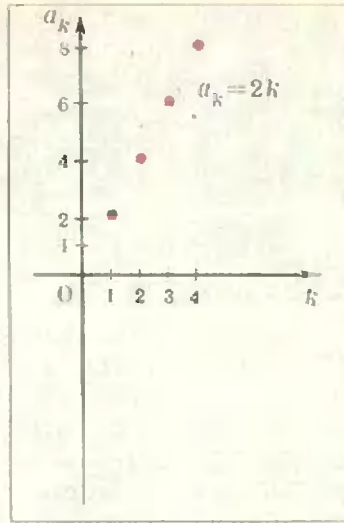


Рис. 2.

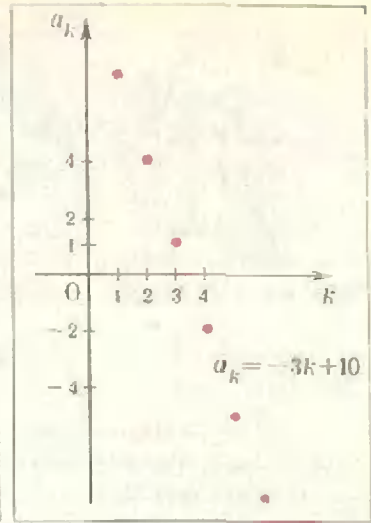


Рис. 3.

(так как $k > 0$). Вот вам еще один способ задания последовательности — *графический*. Скажем, последовательность $\Pi_7 = (7, 4, 1, -2, -5, -8)$ можно задать аналитически формулой $a_k = -3k + 10$ ($k \leq 6$), или графически точками на прямой (рис. 3).

Связь между номером члена k (натуральным числом) и самим членом (действительным числом) можно изобразить и в виде таблицы (см. табл. 1, 2). Этот способ задания последовательности называется *табличным*, но им можно однозначно задать лишь конечную последовательность.

Многие последовательности мож-

но задать так называемым «*рекуррентным соотношением*» (*рекуррентной формулой*). При *рекуррентном (индуктивном) способе задания* k -й член последовательности выражается через предыдущий или несколько предыдущих. Рекуррентное соотношение обязательно должно быть дополнено начальным условием. Так, например, последовательность Π_8 можно задать рекуррентной формулой $a_k = -2a_{k-1}$ при $k > 1$ и начальным условием $a_1 = -2$, то есть начальный (первый) член последовательности указывается непосредственно, а каждый следующий член получается путем умножения предыдущего члена на -2 .

Общий случай

№ члена последовательности	Член последовательности
1	a_1
2	a_2
3	a_3
...	...
k	a_k

Табл. 1

Частный случай — последовательность Π_8

№ члена последовательности	Член последовательности
1	2
2	4
3	6
...	...
10	20

Табл. 2.

Последовательность чисел Фибоначчи *)

$$P_{1,2} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

также задается рекуррентным соотношением $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, при $k > 2$ и начальными условиями $a_1 = a_2 = 1$.

Мы рассмотрели четыре способа задания числовой последовательности: *аналитический, табличный, графический и рекуррентный*. Есть еще один способ — *логический* (словесное описание). Так например, слова «последовательность квадратов» (или, точнее, «последовательность квадратов натуральных чисел») — это словесное описание последовательности

$$P_6 = (1, 4, 9, 16, 25, \dots, k^2, \dots).$$

Аналитический способ является важнейшим, этим способом наиболее лаконично и четко можно указать закон построения последовательности. Однако существуют и такие последовательности, для которых аналитическое задание вообще невозможно (например, последовательность простых чисел) или очень громоздко.

Итак, мы знаем теперь все основные способы задания последовательностей. Как уже было сказано, числовые последовательности играют важную роль не только в математике, но и в естествознании и технике. Особенно частое применение находят два вида последовательностей: арифметические и геометрические прогрессии. Их вы будете изучать в 8 классе.

Упражнения

1. Определите, какие из следующих высказываний неверны, а какие верны.

а) Каждая последовательность есть множество упорядоченных пар.

б) Каждая функция есть однозначное отображение.

в) Каждая последовательность есть однозначное отображение.

г) Каждая функция есть последовательность.

д) Каждая последовательность есть функция.

2. Запишите числовую последовательность $P_{1,3} = (-3, +6, -12, +24, -48, +96, -192, +384, -768)$ в виде множества упорядоченных пар.

3. Запишите всеми известными вам способами задания последовательности P_9 .

4. Задайте рекуррентным соотношением последовательность $P_7 = (7, 4, 1, -2, -5, -8)$.

5. Последовательность задана рекуррентным соотношением

$$a_k = \frac{2}{3} (a_{k-1})^2 \cdot a_{k-2} \text{ при } k > 2$$

и начальным условием

$$a_1 = 2; a_2 = -\frac{3}{2}.$$

Найдите третий, четвертый и пятый члены этой последовательности.

6. Найдите аналитическую форму задания последовательности

$$P_{1,1} = \left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right),$$

в которой $a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k$.

*) Леонардо Фибоначчи — итальянский математик XIII века. Впервые числа Фибоначчи встретились при решении старинной задачи о размножении кроликов. Впоследствии числа Фибоначчи встретились в ряде практических и теоретических задач. Подробнее об этом рассказано в брошюре Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1969), рассчитанной на школьников старших классов. (Прим. пер.)

Как движутся молекулы?

Т. С. Петрова

В 1827 году английский ботаник Броун обнаружил при наблюдении в микроскоп беспорядочное движение мелких взвешенных частиц в жидкости. Это движение не прекращалось, сколько бы времени ни велись наблюдения. Причина, вызывающая это движение, которое в дальнейшем стали называть броуновским движением, долгое время оставалась загадочной. Пытались объяснить его тем, что сосуд с жидкостью сотрясается; предполагали, что это движение является следствием происходящих в сосуде химических реакций; связывали это явление с неравномерным нагреванием жидкости под действием света и пр. Однако все попытки такого рода объяснений оказались несостоятельными.

В конце XIX века физики высказывали мысль о том, что броуновское движение, которое можно наблюдать не только в жидкости, но и в газе, вызывается беспорядочным тепловым движением молекул жидкости или газа. Прошло почти 80 лет с тех пор, как было обнаружено это движение, прежде чем вопрос о его причине был решен окончательно: движение броуновских частиц вызвано ударами молекул вещества, в котором эти частицы взвешены. Установление этого факта сыграло огромную роль в подтверждении и развитии положения молекулярно-кинетической теории о том, что молекулы вещества беспрестанно хаотически движутся.

Многочисленные опыты, связанные с наблюдением броуновского движения, сделали эту теорию «наглядной» и неоспоримой.

Что можно сказать о характере движения молекул?

Согласно кинетической теории молекулы газа в своем хаотическом тепловом движении описывают зигзагообразные траектории, которые представляют собой совокупность громадного числа прямолинейных отрезков. На каждом таком отрезке движение молекулы происходит по инерции, и кончается такой отрезок там, где молекула соударяется с другой молекулой или со стенкой сосуда.

Непосредственное подтверждение такой картины движения молекул было получено в опыте французского физика Дюнуайе, поставленном в 1911 году. Схема этого опыта приведена на рисунке 1. Стеклообразная трубка разделена на три отделения перегородками с маленькими отверстиями, которые расположены на одной прямой. Воздух из трубки откачан. В отделении *A* находится кусочек металлического натрия. Эту часть трубки подогревают, при этом легкоплавкий натрий начинает испаряться. Пары натрия заполняют отделение *A*. Через некоторое время на стенках в отделениях *B* и *C* образуется натриевый налет. В отделении *B* он покрывает стенки трубки и перегородку *bc'*, а в отделении *C* налет образуется только вблизи точки *O'*. Объяснение такой картины очевидно.

Молекулы пара проникают из отделения *A* в отделение *B* через отверстие *O₁*. К отверстию *O₁* моле-

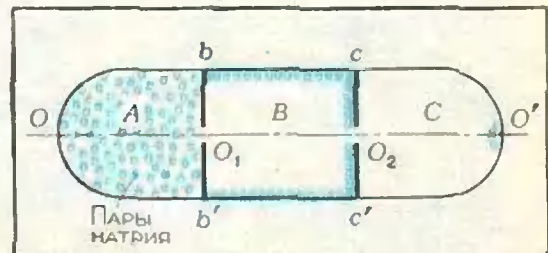


Рис. 1.

кулы подлетают из A по всевозможным направлениям, и, попав в отделение B , они сохраняют эти направления, так как воздух из трубки выкачан, плотность паров, попадающих в отделение B , очень невелика и молекулы практически не испытывают соударений друг с другом. В результате на стенках трубки в отделении B и на перегородке cc' оседают пары натрия, а перегородка bb' справа остается «чистой».

Что происходит в отделении C ? Сюда попадают лишь те молекулы, направление движения которых совпадет с направлением оси отверстий O_1 и O_2 . Поэтому следы натрия можно обнаружить только в окрестности точки O' . Форма пятна натриевого налета вблизи точки O' повторяет форму отверстия O_2 . Если отверстие круглое, то пятно в O' круглое, если отверстие квадратное, то и пятно квадратное. Когда на пути пучка молекул в отделении C помещали «преграду», например, натянутую проволочку, то на пятне осевшего металла вблизи O' получалась «тень» этой проволочки. При увеличении плотности воздуха в трубке пятно налета вблизи O' размывается: молекулы паров сталкиваются с молекулами воздуха и отскакивают в разные стороны, при этом площадь пятна увеличивается.

Опыт Дюнуайе наглядно показывает, что молекулы газа движутся по всевозможным направлениям и что в отсутствие соударений их движение прямолинейно.

Как же можно связать броуновское движение с хаотическим движением молекул? Конечно, траектории движения молекул газа нельзя отождествлять с траекториями движения броуновских частиц. Ведь масса такой частицы во много раз больше массы отдельной молекулы, скорость частицы очень мала по сравнению со скоростью молекул, и ее движение есть результат соударения с ней громадного числа молекул.

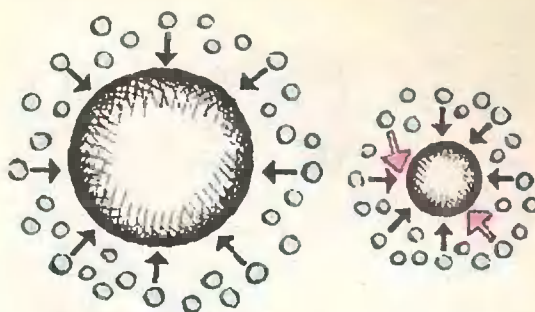


Рис. 2.

Сказанные выше слова «хаотическое движение» кажутся привычными. А ведь они наталкивают в данном случае на вопрос. Действительно, хаотично — значит беспорядочно. Но в беспорядочном движении ни одно из направлений нельзя считать преимущественным, все направления равноправны. Почему же броуновские частицы все-таки движутся? Дело в том, что их размеры очень малы (хотя и громадны по сравнению с размерами молекул), они порядка 10^{-4} — 10^{-5} см. В каждый момент частица получает множество ударов от окружающих ее молекул жидкости или газа. Чем крупнее частица, тем больше молекул в каждый момент с ней сталкиваются, тем более вероятно, что удары противоположных направлений уравновесят, скомпенсируют друг друга, и частица останется неподвижной (рис. 2). Чем мельче частица, тем меньше общее число соударений с молекулами, тем вероятнее, что в своем беспорядочном «наскокивании» на частицу какие-то молекулы «промахнутся», и в результате равновесие частицы будет нарушено — она начнет двигаться. Таким образом, броуновское движение, действительно, подтверждает существование беспорядочного движения молекул.



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,
РЕШЕНИЯ

К статье «Решетки и правильные многоугольники»

1. Докажем свойство 1°.

При параллельном переносе сетка прямых, порождающих решетку, переходит в некоторую сетку (так как параллельный перенос сохраняет расстояния и переводит прямые в параллельные им прямые); но поскольку рассматриваемый параллельный перенос переводит один из узлов решетки в другой, то при таком переносе сетка перейдет в себя.

Свойство 2° почти очевидно следует из 1°: если A , B и C — три вершины параллелограмма, являющиеся узлами решетки (см. рис. 1 в тексте статьи), то и D — узел, поскольку D получается из A параллельным переносом, переводящим узел B в узел C .

Свойство 3° также следует из 1°: нужно взять узел Q на прямой l и ближайший к нему узел P на прямой l (см. рис. 1 в тексте статьи), тогда все узлы, лежащие на l , получатся из Q параллельными переносами вдоль l на расстоянии PQ .

Для доказательства свойства 4° рассмотрим решетку, порожденную параллелограммом $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1 в тексте). Из свойств 2° и 3° следует, что полученная решетка содержится в исходной. Поэтому нужно только доказать, что всякий узел исходной решетки является узлом построенной. В самом деле, если найдется узел исходной решетки, лежащий внутри или на границе одного из параллелограммов, на которые разбивает плоскость построенная сетка, то найдется узел (свойство 3°), содержащийся внутри или на границе основного параллелограмма $ABCD$ исходной решетки и не являющийся его вершиной. Противоречие.

2. Это — решетка, порождаемая прямоугольником с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, b)$, $C(0, b)$.

3. Так как вершины параллелограмма $ABCD$ принадлежат множеству M , то точки A_1, B_1, A_2, D_1 (см. рис. 4, а в тексте статьи) ему также принадлежат (точка B_1 , например, — вершина параллелограмма ACB_1D_1). «Пристраивая» так параллелограммы к уже построенным, получим любую вершину решетки.

4. Рассмотрим интервал $(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)$. В силу следствия леммы 5° (см. с. 27) существуют такие натуральные m и n , что $0 < h = m\alpha - n < \epsilon$. Рассмотрим на числовой оси точки

$$\dots, -rh, \dots, -2h, -h, 0, h, 2h, \dots, rh, \dots$$

Расстояния между соседними точками меньше ϵ ; поэтому в любом интервале числовой оси, длина которого больше ϵ , найдется хотя бы одна из таких точек. Отсюда уже все следует.

5. Пусть M — произвольное натуральное число. Мы должны доказать существование степени двойки, первые цифры десятичной записи которой совпадают с числом M , то есть что существуют такие натуральные m и n , для которых

$$M \cdot 10^n < 2^m < (M + 1) \cdot 10^n,$$

или

$$\lg M + n < m \lg 2 < \lg(M + 1) + n,$$

$$\lg M < m \lg 2 - n < \lg(M + 1).$$

то есть, что найдутся натуральные m и n , для которых число $m \lg 2 - n$ попадет в интервал $(\lg M, \lg(M + 1))$.

Но число $\lg 2$ — иррациональное: в самом деле, предположив, что $\lg 2 = \frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), получим равенство $2q = 10^p$; но этого не может быть, так как правая часть последнего равенства делится на 5, а левая — не делится.

Значит, утверждение упражнения 5 следует из результата упражнения 4.

6. Для доказательства заметим, что $\operatorname{tg} \angle ABC$ (где A, B и C — произвольные узлы целочисленной решетки) — рациональное число (см. рис. 1, а, б): в случае а)

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

в случае б)

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Но $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ — число иррациональное; поэтому правильный треугольник на целочисленной решетке поместить нельзя.

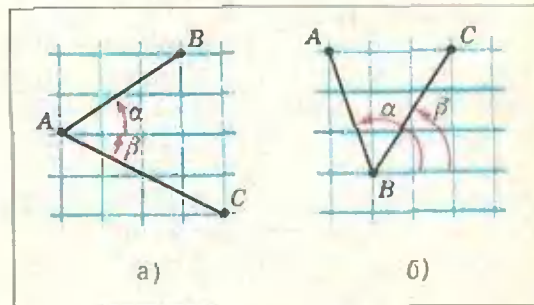


Рис. 1.

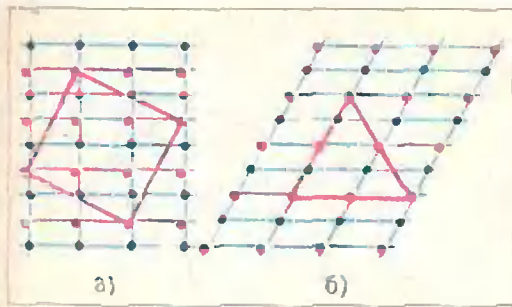


Рис. 2.

Правильный шестиугольник на целочисленной решетке «поместить» также невозможно, его вершины через одну образуют правильный треугольник.

7. (См. рис. 6 в тексте). Положим $AB=1$; тогда $A_1B_1=k$, $BB_1=1-k$, $BE=2-k$. Из подобия ΔA_1BB_1 и ΔBBE получим

$$\frac{k}{1} = \frac{1-k}{2-k}$$

Ответ. $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

8. Ответ. $kq = 2 \sin \frac{\pi}{q}$.

9. 10. См. рис. 2, а, б.

11. Ответ. Такой решетки нет.

Доказательство. Предположим, что на некоторую решетку «поместилась» квадрат $ADEF$ и правильный треугольник ABC (можно считать, что они имеют общую вершину — см. рис. 3). Рассмотрим решетку, порожденную квадратом $ADEF$. Поскольку угла в 60° с вершиной в узлах остроугольной решетки и сторонами, проходящими через другие узлы, не существует (см. упражнение 6), то по крайней мере на одном из лучей, полученных при продолжении сторон AB и AC правильного треугольника, нет узлов новой решетки, кроме A . В силу свойства 2^о § 1 на этом луче лежит бесконечно много узлов исходной решетки.

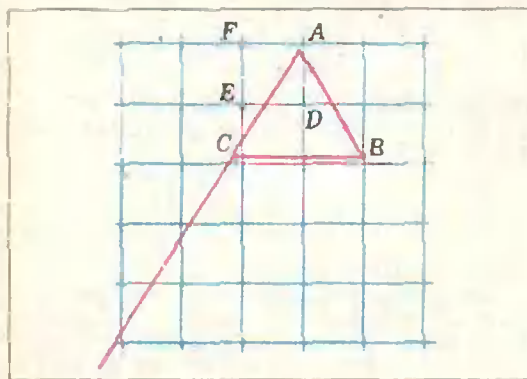


Рис. 3.

Совместим теперь все квадраты, которые пересекает наш луч, с квадратом $ADEF$. Тогда узлы, лежащие на луче, перейдут в различные узлы (почему?), принадлежащие квадрату $ADEF$, а это противоречит тому, что квадрат $ADEF$ содержит лишь конечное число узлов.

12. Мы не приводим решения этой задачи, потому что она предложена вам и в «Задачнике «Кванта» (см. задачу М299).

13. Для $n=1$ оба утверждения справедливы. Предположим, что они справедливы для $n=k$, и докажем их справедливость для $n=k+1$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sin(k+1)x &= \sin kx \cdot \cos x + \cos kx \cdot \sin x = \\ &= \sin x [Q_{k-1}(\cos x) \cdot \cos x + P_k \times \\ &\quad \times (\cos x)] = \sin x \cdot Q_k(\cos x); \\ \cos(k+1)x &= \cos kx \cdot \cos x - \sin kx \cdot \sin x = \\ &= \cos x \cdot P_k(\cos x) - (1 - \cos^2 x) \cdot Q_{k-1}(\cos x) = \\ &= P_{k+1}(\cos x). \end{aligned}$$

14. Рассмотрим числа $p, 2p, \dots, (q-1)p$. Эти числа при делении на q дают различные остатки (если остатки чисел lp и kp совпадут, то разность $(l-k)p$ этих чисел делится на q . Так как числа p и q взаимно просты, то на q делится $l-k$; но это невозможно, поскольку $|l-k| < q$).

Раз все остатки различны, то один из них обязательно будет равен 1.

15. $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

К статье «Вокруг формулы Пика»

3. Пусть M — середина отрезка с концами в узлах. Тогда точка, симметричная узлу относительно точки M , — тоже узел.

4. Пусть при прыжке вершина A треугольника ABC переходит в узел A' , B — середина $[AA']$. Параллелограмм $ABCD$ получается из параллелограмма $BA'EC$ параллельным переносом, который все узлы переводит в узлы так, что внутри и на сторонах $BA'EC$ не может быть узлов.

5. Проведем через все вершины треугольника линии сетки и рассмотрим прямоугольник, образуемый четырьмя из этих линий, заключающий данный треугольник ABC . Можно считать, что A — вершина этого прямоугольника (все точки A, B, C не могут лежать не в вершинах прямоугольника). Если вершины B и C не лежат в вершине E прямоугольника $ADEF$ — скажем, $B \in [DE]$, $C \in [EF]$, — то перпендикуляры, восстановленные в B и C к прямым DE и EF , пересекаются в узле решетки, лежащем внутри или на границе треугольника ABC . Если же одна из вершин B или C — скажем, B — совпадает с E , то угол ACB тупой или прямой.

7. Длины отрезков, соединяющих узлы, могут принимать лишь такие значения, квадрат которых — натуральное число.

Поэтому убывающая последовательность таких длин обязательно конечна.

10. Прделайте в любом порядке такие операции: один из узлов, лежащих внутри или на границе треугольника (одного из уже полученных треугольников разбиения), соединяется с вершинами этого треугольника.

20. Для выпуклого многоугольника это очевидно. В невыпуклом наибольший угол больше 180° . Проведите его биссектрису «до упора» и затем сдвигайте полученную точку по стороне, пока отрезок, соединяющий ее с вершиной угла, не встретит какую-то вершину многоугольника.

К статье «Шар, касающийся ребер многогранника»

1. $\pi (3\sqrt{2} - 4) \text{ см}^2$.
2. $\frac{\pi a^3}{12} (15 - 8\sqrt{2})$.
3. Центр шара находится в центре основания пирамиды.
4. $\frac{4}{27} \pi R^3 (8\sqrt{3} - 9)$.
5. $\frac{4}{3} r \sqrt{3}$.
6. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.
7. $\frac{a(\sin \frac{\pi}{n} - \cos \alpha)}{2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \alpha}$.

К статье «XVI Международная математическая олимпиада»

Приведем краткие решения задач.

1. Заметив, что $N(p+q+r) = 39$, нетрудно понять, что $N = 3$, а $p+q+r=13$. Мы предоставляем читателю провести дальнейшие несложные рассуждения, которые позволят полностью восстановить ход игры. В частности, окажется, что q шариков в первом круге получил игрок С. Заметим, что эту задачу решило подавляющее большинство участников олимпиады.

2. Опишем около треугольника ABC окружность и, взяв на AB произвольную точку D , продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью в точке E (см. рис. 4). Получим

$$CD \cdot DE = AD \cdot DB.$$

Отсюда заключаем, что величина CD будет средним геометрическим величин AD и DB тогда и только тогда, когда точка D делит отрезок CE пополам. Значит, нахождение точки D с искомыми свойствами эквивалентно нахождению на окружности точки E такой, что $CD = DE$, что возможно тогда и только тогда, когда $CF \leq HG$, где CF —

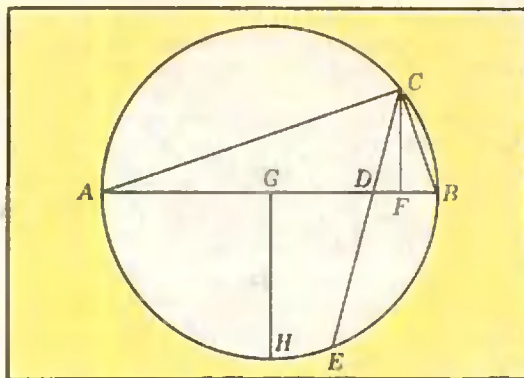


Рис. 4.

высота треугольника ABC , HG — высота сегмента AH/B . Легко подсчитать, что если r — радиус описанной окружности, то

$$CF = 2r \sin \alpha \cdot \sin \beta, \text{ а } HG = r - r \cos \gamma = 2r \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

3. Введем обозначения

$$A_m = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq m} C_m^{2k+1} \cdot 2^{3k}, \quad B_m = \sum_{0 \leq 2k \leq m} C_m^{2k} \cdot 2^{3k}$$

При m нечетном, большем 1, A_m дает сумму, фигурирующую в условии задачи. Легко проверить, что при $m \geq 1$ $A_m + B_m = A_{m+1}$ и $8A_m + B_m = B_{m+1}$, причем $A_1 = B_1 = 1$.

Покажем теперь по индукции, что A_m при m нечетном, а B_m при m четном не делится на 5. Для всех $m \leq 3$ это верно, так как $A_1 = 1, A_3 = 11, B_2 = 9$. Пусть для некоторого $i > 3$ это верно при всех $m \leq i$. Проверим, что тогда это верно и при всех $m \leq i+1$. В самом деле, написанные выше рекуррентные соотношения дают

$$A_{m+3} = 5(5A_m + 2B_m) + B_m, \\ B_{m+3} = 5(17A_m + 5B_m) + 3A_m.$$

Отсюда получаем доказываемое.

4. Из условия задачи вытекает, что $a_i \geq i$, и поэтому

$$32 = a_1 + a_2 + \dots + a_p \geq \frac{p(p+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что $p \leq 7$.

Выпишем все возможные разложения числа 32 на сумму семи попарно различных натуральных слагаемых: $32 = 1+2+3+4+5+6+11 = 1+2+3+4+5+7+10 = 1+2+3+4+5+8+9 = 1+2+3+4+6+7+9 = 1+2+3+5+6+7+8$.

Первый случай не реализуется, так как на шахматной доске не существует прямоугольника из 22 клеток; остальные случаи реализуются, в чем легко убедится, построив соответствующие примеры.

5. Очевидны неравенства

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

и

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Итак, $1 < S < 2$. То, что сумма S принимает все значения из интервала (1, 2), большинство участников доказывали, используя идею непрерывности функции $S(a, b, c, d)$. Читателям, незнакомым с общими свойствами непрерывных функций, рекомендуем найти другое решение, где все сводится к изучению множества значений элементарных функций.

6. Предположим сначала, что каждый из многочленов $P(x)-1$ и $P(x)+1$ имеет не менее трех различных целых корней (причем они, очевидно, отличны от корней другого). Из этих целых чисел возьмем наименьшее и обозначим его через a . Не ограничивая общности, можем считать, что a — корень многочлена $P(x)+1$. Тогда справедливо представление $P(x)+1 = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — также многочлен с целыми коэффициентами. Пусть p, q, r — три различных целых корня многочлена $P(x)-1$, причем все они больше a . Но $P(x)-1 = (x-a) \times Q(x) - 2$. Отсюда $2 = (p-a) \cdot Q(p) = (q-a) \cdot Q(q) = (r-a) \cdot Q(r)$, где $p-a, q-a, r-a$ — различные положительные целые числа. Но тогда хотя бы одно из них больше 2, что, очевидно, приводит к противоречию.

Таким образом, наше предположение неверно, и значит, хотя бы у одного из уравнений $P(x) = 1$ и $P(x) = -1$ число целых корней меньше или равно 2. Отсюда и из того, что число корней каждого из этих уравнений не превосходит $\deg(P)$, следует доказываемое неравенство.

К статье «VII Международная физическая олимпиада»

Задача 1

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_H}{m_H}} = 6,25 \cdot 10^4 \text{ м/с};$$

$$\frac{\Delta v}{v_{\text{ср}}} = \frac{v_0}{c} \cdot 100\% \approx 2 \cdot 10^{-2} \%$$

Задача 2

$$n_B = \sqrt{n_A^2 + \sin^2 \alpha} = 1,3;$$

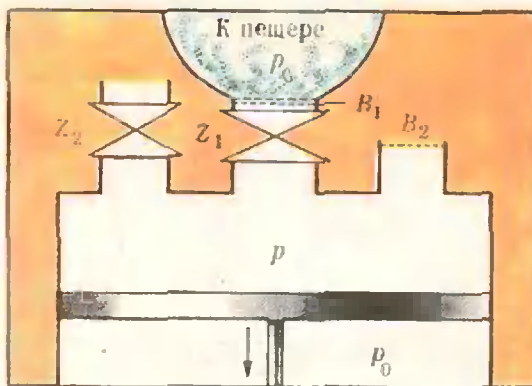


Рис. 5.

$$x_B = R \left(1 - \frac{n_A}{n_B} \right) = 1 \text{ см};$$

$$d = \sqrt{R^2 - (R - x_B)^2} = 5 \text{ см}.$$

Задача 3

Схема двигателя может быть, например, такой, как показано на рисунке 5.

Экспериментальная задача
Электрическая цепь представлена на рисунке 6.

К статье «Числовые последовательности»

1. Высказывание г) неверно. Последовательностью является лишь та функция, областью определения которой служит множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$ или часть его $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

2. $\{(1, -3); (2, 6); (3, -12); (4, 24); (5, -48); (6, 96); (7, -192); (8, 384); (9, -768)\}$.

3. Мы укажем лишь аналитическое задание: $a_k = (-2)^k$.

4. $a_k = a_{k-1} - 3$.

5. $a_3 = 3, a_4 = -9, a_5 = 162$.

6. $a_k = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

К задаче «Лабиринт-алфавит»

(см. «Квант», 1974, № 11, с. 16)

См. рис. 7. Указание. Если какая-то буква встречается в лабиринте лишь один раз, то через нее необходимо провести ломаную.

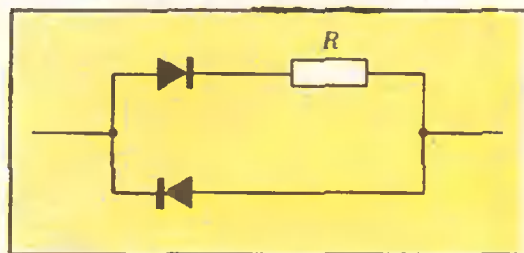


Рис. 6.

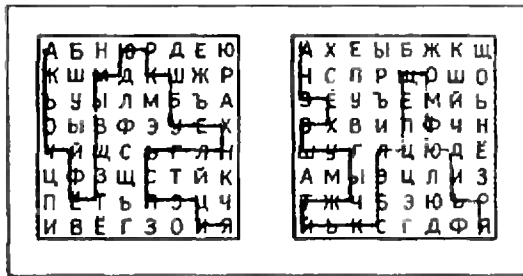


Рис. 7.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. с. 65)

1. ИСК = 954.
2. При изготовлении консервов перед тем, как закрыть банку, ее и содержимое нагревают. Когда закрытая банка остынет, воздух в ней окажется разреженным, объем томатов увеличится. Если теперь снять крышку с банки, давление воздуха станет равным атмосферному, томаты сожмутся, и уровень жидкости в банке понизится.
3. 1 домик, 3 квадрата, 6 треугольников.
4. Выталкивающая сила равна весу вытесненной кубиком воды.
5. Температура в первом случае ниже, так как изменению температуры на 1° по шкале Фаренгейта соответствует изменение температуры на $0,55^\circ$ по шкале Цельсия.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 11)

1. Наибольшее значение суммы равно 45. При изменении знака на противоположный у любого слагаемого результат изменится на удвоенное слагаемое, а поэтому результат всегда будет нечетным, и не может быть равен 20. Саша наверняка допустил ошибку, а Володя мог написать $1+2-3+4+5+6+7+8-9 = 21$.
2. Большая часть поверхности гвоздя не попадает в пламя свечи, тепло с этой поверхности излучается в окружающее пространство, и температура гвоздя остается ниже температуры плавления железа.
3. $123 \times 546 = 67\ 158$.
4. В пустоте сегнерова колесо будет вращаться даже быстрее, чем в воздухе (из-за отсутствия сопротивления).
5. —2, 2, 3, 5, 9.
6. Надо начать обход из одного треугольника и кончить в другом, потому что у треугольника нечетное число сторон.

Читатели предлагают задачи

1. Даны точки касания трех попарно касающихся окружностей. Найти центры этих окружностей.

Л. Черепанова

2. При каком соотношении между сторонами прямоугольного треугольника треугольник, составленный из его медиан, также будет прямоугольным?

В. В. Малинин

3. Решить уравнение
 $n^n - n! = 513$

А. Гулиев

3. В трапецию вписана окружность. Доказать, что боковые стороны трапеции видны из центра окружности под углами 90°

А. Тимофеев

5. Дан произвольный выпуклый пятиугольник площади 1 . Средины его соседних сторон соединены. Доказать, что площадь полученного пятиугольника не превосходит $\frac{3}{4}$.

В. Смолко

6. На ворсистом материале имеется дыра треугольной формы. У портного нашлась заплатка из того же материала, но она совпадает с дырой с изнанки. Как портной должен разрезать заплатку, чтобы заделать дыру?

Э. Л. Гузовский

7. Как раскроить (прямыми разрезами выпуклый n -угольник, чтобы из полученных частей можно было составить его зеркальное отражение?

Определить наименьшее требующееся в общем случае число разрезов (в зависимости от числа n).

Г. А. Юрина

Напечатано в 1974 году

Академии наук СССР 250 лет	4	2	<i>Рейтман М. И.</i> Транспортная задача	7	13
250 лет Академии наук СССР	5	2	<i>Рубина Н. С.</i> О языках иностранных	7	24
Статьи по математике			<i>Савин А. П.</i> Проективная плоскость	3	9
<i>Абрамович В. С.</i> Числа Бернулли	6	10	<i>Садовский Л. Е.</i> Математика для спорта и спорт для математики	1	2
<i>Александров П. С.</i> Павел Самуилович Урьсон (к пятидесятилетию со дня смерти)	8	3	<i>Саннинский В. Я.</i> Об одной интересной книге	3	24
<i>Белага Э. Г.</i> Арифметика на географической карте	4	23	<i>Торонджадзе М. С., Бсндукидзе А. Д.</i> Кривые Пеано	8	13
<i>Бельский А. А., Садовский Л. Е.</i> Кольца	2	2	<i>Яглом И. М.</i> Заплаты на кафтане	2	13
<i>Березин В. Н.</i> Первый учебник математики в России	6	14	Статьи по физике		
<i>Болтянский В. Г.</i> Бывает ли равномерное движение?	12	2	Академику П. Л. Капице	7	3
<i>Брудно А. Л.</i> Вокруг циркуля	10	2	<i>Арцимович Л. А.</i> Плазма — четвертое состояние вещества	3	2
<i>Вакутен В. Н.</i> Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк»	11	23	<i>Бронштэн В. А.</i> Противостояния Марса	11	12
<i>Гервер М. Л.</i> Сюрпризы	1	13	<i>Бялко А. В.</i> Электролиз и закон сохранения энергии	1	22
<i>Гервер М. Л.</i> От перемены мест слагаемых . . .	9	14	<i>Вавилов С. И.</i> Очерк развития физики в Академии наук	4	12
<i>Гик Е. Я.</i> Проективные шахматы	3	15	<i>Воробьев И. И.</i> Необычное путешествие	2	22
<i>Гнеденко Б. В.</i> Академия наук и прогресс математики	4	3	<i>Гесузин Я. Е.</i> Капля	9	20
<i>Гнеденко Б. В.</i> Академия наук и прогресс математики (продолжение)	5	18	<i>Герштейн Г. М.</i> Сигналы. Спектры	6	2
<i>Гутер Р. С., Донской М. В.</i> Машина играет в шахматы	11	17	<i>Гиндикин С. Г.</i> Из истории маятниковых часов	9	2
<i>Делоне Б. Н.</i> Леонард Эйлер	5	26	<i>Гинцбург М. А.</i> Планеты, о которых мы мало знаем	7	4
<i>Демидович Н. Б.</i> Как начертить n -мерный куб?	8	22	<i>Гравовский М. А.</i> Как физики определяют кривизну параболы	7	21
<i>Донской М. В.</i> Чемпионат мира среди шахматных программ	12	34	<i>Каганов М. И., Любарский Г. Я.</i> Электрон излучает фотоны	12	7
<i>Егоров А. А.</i> Решетки и правильные многоугольники	12	26	<i>Кикоин А. К.</i> Свободное падение тел на вращающуюся Землю	4	18
<i>Людмилов Д. С., Людмилава С. Д.</i> Правдоподобные рассуждения и математика	5	43	<i>Кикоин А. К.</i> Физики, математики, спорт . . .	8	36
<i>Мордкович А. Г.</i> Экстремумы многочленов третьей степени	11	8	<i>Кикоин И. К.</i> Он прожил счастливую жизнь	5	36
<i>Прятець А.</i> Решение логических задач при помощи графов с цветными вершинами	12	14	<i>Крессин В. З.</i> Вблизи абсолютного нуля	1	9
			<i>Лешковцев В. А.</i> Физика в Академии наук СССР (1917—1974 гг.)	5	6

<i>Малов Н. Н.</i> Как сфотографировали свет	10	10	M291 — M295; Ф303 — Ф307	11	40
<i>Миц Н. А.</i> Гейзеры	10	13	M296 — M300; Ф308 — Ф312	12	44
<i>Мороз И. И.</i> Электрохимическая обработка металлов	1	27	Победители конкурса «Кванта»	3	32
<i>Мякишев Г. Я.</i> Вынужденные механические колебания	11	2	Победители конкурса «Кванта»	9	40
<i>Понтекоров Б.</i> Юность Энрико Ферми	8	17	Решения задач		
<i>Семенчинский С. Г.</i> Линзы, зеркала и Архимед	12	23	M200—M204; Ф211, Ф212	1	44
<i>Сморodinский Я. А.</i> Сколько времени идет свет от Меркурия?	3	20	M205 — M207; Ф213 — Ф217	2	36
<i>Сморodinский Я. А.</i> О силах инерции	8	28	M200, M208 — M210, Ф218 — Ф222	3	36
<i>Шварцбург А. Б.</i> Магнитное поле Земли	2	8	M211 — M218; Ф223 — Ф227	4	32
			M219 — M221; Ф228 — Ф232	5	50
			M222 — M230; Ф233 — Ф237	6	20
			M231 — M235; Ф238 — Ф242	7	38
			M236 — M240; Ф243 — Ф247	8	46
			M241 — M245; Ф248 — Ф252	9	44
			M246 — M250; Ф253 — Ф259	10	21
			M251 — M255; Ф260 — Ф266	11	42
			M256 — M260; Ф267 — Ф272	12	46
Лаборатория «Кванта»			Практикум абитуриента		
<i>Головей М. П., Добржанский Г. Ф.</i> Игрушки из кристаллов	1	31	I		
<i>Драчев В., Мазур А.</i> Фотокамера «Рыбий глаз»	11	30	<i>Асламазов Л. Г.</i> Свойства паров, испарение и кипение жидкостей	1	60
<i>Покровский Г. И.</i> Гидродинамический механизм в падающей пробирке	3	26	<i>Болтянский В. Г.</i> Четырехугольники	9	53
Математический кружок			<i>Дорофеев Г. В.</i> Переформулировка задачи	1	53
<i>Бекламов Б. В.</i> Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам	10	17	<i>Дорофеев Г. В.</i> Пределы последовательностей	11	54
<i>Беласа Э. Г.</i> Вычисление многоугольников — от Ньютона до наших дней	7	29	<i>Зайцев И. А.</i> Электрические машины постоянного тока	5	64
<i>Васильев Н. Б.</i> Семейство параллельных n-угольников	11	32	<i>Крайzman М. Л.</i> Шар, касающийся ребер многогранника	12	55
<i>Васильев Н. Б.</i> Вокруг формулы Пика	12	39	<i>Кузнецов Е. П.</i> «Космические» задачи на вступительных экзаменах	11	60
<i>Гервер М. Л.</i> 20 задач на пределы	3	27	<i>Кушнин И. А.</i> Метод вспомогательного элемента	2	46
<i>Гик Е. Я.</i> О силе шахматных фигур	6	15	<i>Мякишев Г. Я.</i> О законе сохранения энергии в механике	3	52
<i>Гуревич Г. А., Работ Ж. М.</i> О вероятностях и «хороших» числах	1	35	<i>Розов Н. X.</i> Читатели советуют	3	48
<i>Долгов О. Т.</i> Игра в 15	2	26	<i>Садовский Л. Е.</i> «Прикладная математика» — новая специальность в технических вузах	6	38
<i>Клумова И. Н.</i> Игра «Жизнь»	9	26	<i>Сидоров Ю. В.</i> Аргумент комплексного числа	4	41
<i>Тоом А. Л.</i> Вступительная контрольная работа в ВЗМШ в 1974 году. Решения задач	8	40	<i>Тихомирова В. А.</i> Механические колебания	6	31
<i>Тоом А. Л.</i> Из жизни единицы	9	31	<i>Шарыгин И. Ф.</i> Задачи о пересечении тел	5	58
			<i>Шарыгин И. Ф.</i> Чертеж в стереометрических задачах	10	32
Задачник «Кванта»			II		
Задачи			<i>Белявский С. С.</i> Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина	7	49
M241 — M245; Ф253 — Ф257	1	42	<i>Борзяк А. Н., Давыдов В. И., Дьяконов И. А., Дыбов П. Т.</i> Телевидение готовит в вуз	3	62
M246 — M250; Ф258 — Ф262	2	34	<i>Борзяк А. Н., Давыдов В. И., Дыбов П. Т., Дьяконов И. А., Иванов А. С.</i> Телевидение готовит в вуз	4	50
M251 — M255; Ф263 — Ф267	3	34	<i>Воронин Л. Н., Ионов В. П.,</i>		
M256 — M260; Ф268 — Ф272	4	30			
M261 — M265; Ф273 — Ф277	5	48			
M266 — M270; Ф278 — Ф282	6	18			
M271 — M275; Ф283 — Ф287	7	36			
M276 — M280; Ф288 — Ф292	8	44			
M281 — M285; Ф293 — Ф297	9	42			
M286 — M290; Ф298 — Ф302	10	20			

Ляховский А. В. Завод-вуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева	10	38	в дальний космический рейс	11	66
Голубов Э. А. Уральский государственный университет им. А. М. Горького	7	50	Лишевский В. П. Новые книги	5	72
Гулькаров Н. Р., Закриллаев Ф. З., Пак Е. В., Умирбеков А. У. Ташкентский автомобильно-дорожный институт	7	58	Лишевский В. П. Рассказ о капле	9	57
Забез А. И., Николаев И. Н., Шолохов Н. В. Московский инженерно-физический институт	1	67	Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	3	66
Каменецкий С. Е., Крупич В. И., Парфентьева Н. Е., Постникова Л. П., Чернецов М. М., Шадрин Г. А. Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	7	52	Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	7	60
Колпаков В. С., Сахарова Р. Н. Ярославский политехнический институт	7	57	Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	9	60
Коновальцев И. В., Новиков В. И. Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского	7	56	Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	11	64
Коровин В. И., Лужнов Ю. М. Московский институт инженеров железнодорожного транспорта	6	42	Садовский Л. Е. Новый учебник по геометрии	10	58
Ленинградский государственный университет	6	47	Хрусталева А. Ф. Старые ошибки... вторым изданием	1	74
Лукашкин Г. Л., Колягин Ю. М. Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской	7	54	Яглом И. М. Удачная серия	3	64
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	3	60	Яглом И. М. Слишком маленькая серия	9	58
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	4	47	И н ф о р м а ц и я		
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	5	70	Асламян В. К., Кирьянов А. П., Чугунова Т. А. Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте	1	69
Московский авиационный институт	6	44	Борзяк А. Н., Диденко А. Я., Дыбов П. Т., Дьяконов И. А., Рошупкин В. В. Телевидение готовит в вуз	6	50
Московское высшее техническое училище	6	46	Виленкин А. Н., Тихомирова В. А. Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов	9	62
Новосибирский государственный университет	2	52	Вниманию семиклассников! Всесоюзная заочная математическая школа объявляет прием учащихся	1	72
Тонян В. А. Московский институт электронного машиностроения	6	43	Волков В. А., Лихтарников А. Л., Рубанов И. С. Конференция по работе со школьниками	8	59
Рецензии, библиография			Дьяконов И. А., Качанов А. В., Наслузов И. И. Телевидение готовит в вуз	9	67
Дорофеев Г. В. Методическое пособие по разделу «Неравенства»?	4	52	Иванов С., Варакин А. День юного физика	11	73
Зорич И. Беседы старого учителя	2	56	Кабалевский Ю. Д. «Прикладная математика» в техникумах	6	49
Зорич И. Энрико Ферми — физик	8	54	Капун В. И. Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет	8	56
Кедров Ф. Брошюры по физике	3	64	Кованцова Л. В. XIV математическая олимпиада школьников Украины	9	66
Левитан Е. П. Приглашение			Лешковцев В. А. XXIV Международной астронавтический конгресс	3	69
			Лешковцев В. А. Ленинские премии 1974 года	11	71
			Лиманов Л. Г. Пятый праздник юных математиков Закавказья	7	62
			Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР	11	67
			Орлов А. И., Розенталь А. Л. Встречи с тремя неизвестными	3	68

Всесоюзные и Международные олимпиады школьников

<i>Лиманов Л. Г., Смоленский М. Л.</i> Олимпиада по математике	10	40
<i>Петрова Т. С., Чернова Л. В.</i> Олимпиада по физике	10	49
<i>Скворцов В. А., Моисеева З. И.</i> XVI Международная математическая олимпиада	12	60
<i>Тарасюк Г. С.</i> VII Международная физическая олимпиада	12	63

«Квант» для младших школьников

Бал у принцессы Арифметики	7	66
<i>Бендукидзе А. Д.</i> Фигурные числа	6	53
<i>Булавко И. Г.</i> Делимость чисел	9	70
<i>Головей М. П., Куликова Л. С.</i> Ветка — барометр	9	74
Задачи	1--12	
<i>Колмогоров А. Н.</i> Решето Эратосфена	1	77
<i>Кордемский Б. А.</i> Топологические опыты своими руками	2	58
<i>Кордемский Б. А.</i> Топологические опыты своими руками (продолжение)	3	73
<i>Кордемский Б. А.</i> Турнир в незнакомом городе	4	55

<i>Крупский В. Н., Орлов А. И.</i> Коза на привязи	5	74
<i>Лозе Х.</i> Числовые последовательности	12	66
<i>Мостовой А. И.</i> Нет ли другого доказательства	11	75
<i>Петрова Т. С.</i> Как движется молекула?	12	70
<i>Попова И.</i> Об одной задаче	9	69
<i>Родина Н. А.</i> Как измерить молекулу?	6	57
<i>Родина Н. А.</i> Можно ли взвесить молекулу?	7	69
<i>Смышляев В. К., Савин А. П.</i> Нет ли другого доказательства	8	62
<i>Ушаков В. В.</i> Метод бесконечного спуска	10	60

Уголок коллекционера

<i>Алтыкис А. В.</i> На марках — Макс Планк	1	3-я с. обл.
<i>Алтыкис А. В.</i> Марки, посвященные Бенджамину Франклину	3	3-я с. обл.
<i>Алтыкис А. В., Лешковцев В. А.</i> На марках — Академия наук СССР	5	3-я с. обл.
<i>Лешковцев В. А.</i> Первый полет к Венере	2	3-я с. обл.
<i>Лешковцев В. А.</i> В. И. Ленин — величайший ученый XX века	4	3-я с. обл.
<i>Рудов В. А.</i> Физики — члены Академии наук СССР на марках	12	3-я с. обл.

Корректор *Н. Л. Дорохова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/IX-74 г
Подписано в печать 29/X-74 г
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,5
Уч.-изд. л. 7,06 Тираж 361 185 экз. Т-18325
Цена 30 коп. Заказ 1889

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательства, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Физики — члены Академии наук СССР на марках

Среди почти 4500 марок, выпущенных в нашей стране после Великой Октябрьской революции, шесть марок посвящены физикам — членам Академии наук СССР. Изображенные на них ученые были выдающимися физиками и крупными организаторами советской науки.

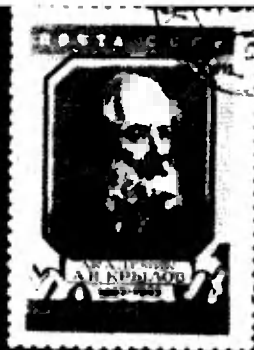
Первая из этих марок была выпущена в 1956 году. На ней изображен портрет академика Алексея Николаевича Крылова. Академик Крылов был выдающимся математиком, механиком и специалистом по математической физике. Он был также инициатором создания Физико-математического института Академии наук и первым его директором. Этот институт впоследствии преобразовался в Физический институт имени П. Н. Лебедева и математический институт имени В. А. Стеклова. В 1963 году, к столетию со дня рождения А. Н. Крылова, была выпущена вторая марка с его портретом.

В этом же году вышла марка с портретом академика Игоря Васильевича Курчатова. Она была выпущена в связи с шестидесятилетием со дня его рождения. Академик И. В. Курчатов создал и возглавил большой коллектив советских ученых, успешно решивших проблему использования атомной энергии. По его инициативе была построена первая в мире атомная электростанция и создан Институт атомной энергии, который носит теперь имя этого замечательного ученого.

В 1961 году, к семидесятилетию со дня рождения академика Сергея Ивановича Вавилова, была выпущена в свет марка с его портретом. С. И. Вавилов был выдающимся специалистом по физической оптике. Наряду с исследовательской деятельностью он вел огромную научно-организационную работу. Многие годы С. И. Вавилов был директором Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР и главным редактором Большой Советской Энциклопедии. С 1945 по 1951 год он был Президентом Академии наук СССР. Он был также одним из создателей Всесоюзного общества «Знание» и его первым председателем.

В 1974 году вышли в свет еще две почтовые марки с портретами физиков — членов Академии наук СССР. На одной из них изображен вице-президент Академии наук СССР академик Михаил Дмитриевич Миллионщиков, на другой — академик Лев Андреевич Арцимович. Оба они были членами редакционной коллегии журнала «Квант».

Ученик академика А. Н. Колмогорова академик М. Д. Миллионщиков был одним



из ближайших сотрудников И. В. Курчатова. Он внес крупный вклад в ряд областей современной гидродинамики и, в частности, в исследование гидродинамических свойств горячей плазмы. Деятельность М. Д. Миллионщикова на посту вице-президента Академии наук СССР оставила глубокий след в развитии советской науки.

Академик Л. А. Арцимович также был одним из ближайших сотрудников И. В. Курчатова. Основными областями его научных интересов были атомная физика и физическая электроника. После смерти И. В. Курчатова Л. А. Арцимович возглавлял отечественные исследования в области физики горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций. В течение многих лет он руководил работой крупнейшего отряда ученых Академии наук, объединенных в Отделение физико-математических наук, а позднее — в Отделение общей физики и астрономии, будучи академиком-секретарем этих отделений.

В. А. Рудов

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ «КАИССЫ»

С 5 по 8 августа 1974 г. в Стокгольме проходил первый чемпионат мира по шахматам среди вычислительных машин. В нем приняли участие 13 программ из 8 стран. Первое место заняла советская программа «Каисса», созданная в Институте проблем управления.

Спортивный характер этого соревнования не должен затенять его научный смысл. Различные алгоритмы для игры в шахматы создаются потому, что эти алгоритмы могут применяться в других задачах, где приходится выбирать решение в сложной ситуации. Ученые избрали в качестве модели для таких задач — очень важных в управлении, экономике и других практических областях — шахматы потому, что, с одной стороны, шахматы имеют простые правила и сложную стратегию, а, с другой стороны, на шахматах хорошо видны достоинства и недостатки алгоритмов.

В прошлом номере журнала писалось о том, как вообще можно научить машину играть в шахматы. В этом номере рассказано о специальной подготовке «Каиссы» к чемпионату.

